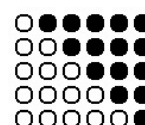


## Problem des Monats März 2025

### Begründungen mit Bildern

Der Legende nach wurde dem neunjährigen Carl Friedrich Gauß in der Schule aufgetragen, als Rechenübung die Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren. Der kleine Carl sah das Ergebnis jedoch unmittelbar, indem er ein Argument verwendete, wie es rechts dargestellt ist: Anhand des Bildes kann man sehen (wie?), dass  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \cdot 6 : 2 = 15$  ist.



Ebenso rechnete Gauss einfach

$$1 + 2 + \dots + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 5050.$$

### Aufgabe

Betrachte jeweils die Gleichungen und ergänze einige weitere nach demselben Muster. Stimmen diese Gleichungen dann auch? Falls ja: Begründe die Gesetzmäßigkeit mithilfe eines Bildes.

$1 = 1^2$	$1 = 1^2$
$1 + 2 + 1 = 2^2$	$1 + 3 = 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$	$1 + 3 + 5 = 3^2$
...	...

$1^2 - 1 = 2 \cdot 0$	$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$2^2 - 1 = 3 \cdot 1$	$4^2 - 3^2 = 4 + 3$
$3^2 - 1 = 4 \cdot 2$	$5^2 - 4^2 = 5 + 4$
...	...

$$\begin{aligned}
 1^2 &= 1 \cdot 2 : 2 \\
 2^2 - 1^2 &= 2 \cdot 3 : 2 \\
 3^2 - 2^2 + 1^2 &= 3 \cdot 4 : 2 \\
 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 &= 4 \cdot 5 : 2 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$