

Problem des Monats März 2024

Mathematisches Billard – Teil 2¹: Umfüllprobleme

Umfüllprobleme in verschiedenen Variationen sind seit jeher beliebte Knobelaufgaben:

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Krug mit 8 Litern Fassungsvermögen, der komplett mit Wasser gefüllt ist. Außerdem stehen zwei leere Krüge zur Verfügung, in die 5 bzw. 3 Liter passen. Wie kann man nun durch Umfüllen 4 Liter Wasser abmessen?

Eine Reihe weiterer Fragen stellt sich dabei ganz natürlich:

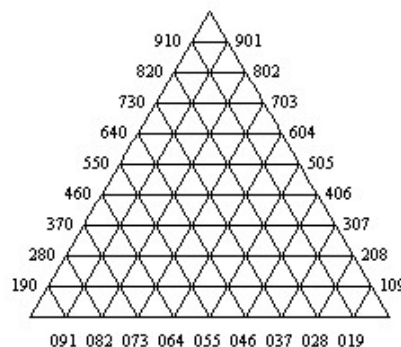
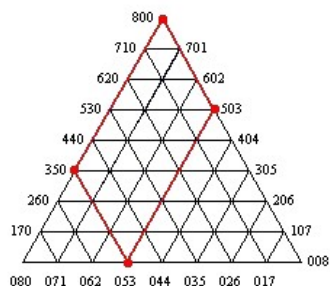
- Kann man in obiger Situation jede (ganzzahlige) Literzahl abmessen?
- Wie sieht es bei anderen Kruggrößen aus? Kann man z. B. 4 Liter abmessen, wenn in obiger Situation statt des 5-Liter-Krugs ein 6-Liter-Krug zur Verfügung steht?
- Allgemeiner: Wenn drei Krüge mit Fassungsvermögen a, b, c zur Verfügung stehen, die am Anfang insgesamt die Wassermenge $n \leq a + b + c$ enthalten: Welche Literzahlen $1 \leq k \leq n$ kann man dann abmessen?
- Falls man eine bestimmte Literzahl abmessen kann: Was ist die kleinste Anzahl an Umfüllvorgängen, die dafür benötigt wird?

Was das ganze nun mit „mathematischem Billiard“ zu tun hat, sieht man nach einem Wechsel der Darstellung hin zu sogenannten Dreieckskoordinaten:

Aufgabe 2

Das Koordinatensystem unten links bezieht sich auf das in Aufgabe 1 zuerst gestellte Umfüllproblem.

- Welche Bedeutung haben wohl die Koordinaten wie z. B. 620 an den äußeren Gitterpunkten des Koordinatensystems? Welcher Gitterpunkt hätte z. B. die Koordinaten 323?
- Warum ist für das gegebene Umfüllproblem nur der rot umrandete Bereich des Koordinatensystems relevant?
- Inwiefern kann man sagen, dass das gegebene Umfüllproblem nichts anderes als ein „Billardspiel auf dem rot umrandeten Tisch“ ist?



Aufgabe 3

Man markiere im Koordinatensystem rechts oben einen geeigneten „Billardtisch“, um die Teile c) und d) von Aufgabe 1 zu beantworten für Krüge mit $a = 8$, $b = 7$ und $c = 6$ Litern Fassungsvermögen, wenn der erste zu Beginn 8 Liter und der zweite 2 Liter enthält und der dritte leer ist.

¹vgl. Problem des Monats August / September 2022