

Problem des Monats Dezember 2022

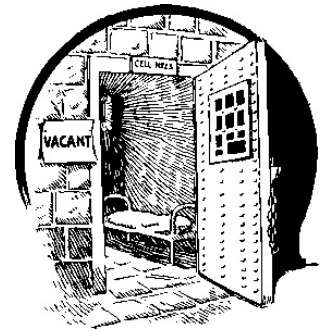
Das Gefängnis des Weihnachtsmannes



Der Weihnachtsmann besitzt ein riesiges Gefängnis mit 1000 Zellen, in denen 1000 Feinde des Weihnachtsfestes (z. B. der Grinch) einsitzen. Allerdings ist der alte Mann sehr großzügig, wie jedes Kind mit ungebührlichem Benehmen bestätigen kann, das an Weihnachten dann doch wieder mit vielen Geschenken bedacht wird.

Im Rahmen dieser Großzügigkeit sollen dieses Jahr einige Gefangene freigelassen werden. Dazu hat die Mathematik-Elfe eigens das folgende Verfahren entwickelt:

- Zunächst werden alle 1000 Zellentüren aufgeschlossen, wobei darauf geachtet wird, dass kein Gefangener fliehen kann.
- Im zweiten Durchgang werden die Türen 2, 4, 6, ... wieder verschlossen.
- Im dritten Durchgang wird jede der Türen 3, 6, 9, ... verschlossen, falls sie geöffnet ist und geöffnet, falls sie verschlossen ist.
- Im vierten Durchgang wird dann jede der Türen 4, 8, 12, ... verschlossen, falls sie geöffnet ist und geöffnet, falls sie verschlossen ist.
- Dies geht immer so weiter bis zum 1000. Durchgang.
- Jeder Gefangene, dessen Zellentür am Ende geöffnet ist, wird freigelassen.



Aufgaben

- a) Welche der 1000 Gefangenen kommen am Ende frei?
- b) Bei welchem Gefangenen, der dann doch nicht frei kommt, ist die Zellentür am längsten geöffnet?
- c) Das Verfahren ist für einige Gefangene sehr grausam, weil ihre Tür besonders oft geöffnet und wieder verschlossen wird. Welche Tür wird am häufigsten geöffnet, wieder verschlossen, wieder geöffnet, wieder verschlossen, ...?
- d) Gib eine Methode an, mit der man für eine Zellentür ermitteln kann, wie oft sie geöffnet, wieder verschlossen, wieder geöffnet, wieder verschlossen, ... wird.