Problem des Monats November 2019

Mittelwerte ordnen mit der Satzgruppe des Pythagoras

Es gibt je nach Anwendungssituation verschiedene sinnvolle Möglichkeiten, einen Mittelwert zweier Zahlen x und y zu berechnen. Vor allem die folgenden Mittelwerte sind dabei oft nützlich:

$$A = \frac{x+y}{2} \quad \text{(arithmetisches Mittel)}, \qquad G = \sqrt{xy} \quad \text{(geometrisches Mittel)},$$

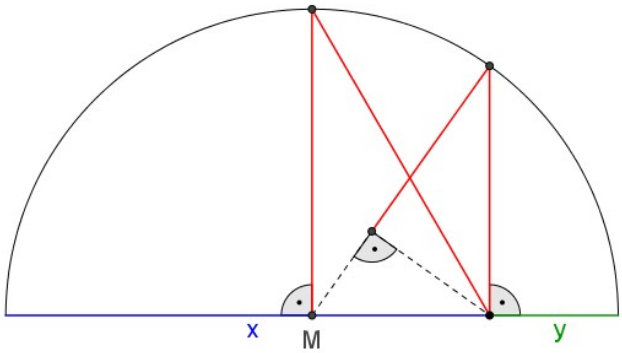
$$H = \frac{2xy}{x+y} \quad \text{(harmonisches Mittel)}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{(quadratisches Mittel)}.$$

Aufgabe 1
Auf den ersten Blick ist es diesen Formeln nicht anzusehen, aber überraschenderweise kann man unabhängig vom konkreten Wert der (positiven) Zahlen x und y die Mittelwerte A, G, H und Q nach ihrer Größe ordnen.

a) Man stelle z. B. mithilfe einer Tabellenkalkulation eine Vermutung darüber auf, in welcher Größenbeziehung die vier Mittelwerte zueinander stehen.

b) Ebenfalls untersuche man, ob die Mittelwerte auch gleich sein können, und wenn ja: unter welcher Voraussetzung an x und y das der Fall ist.

Wie wir nun sehen werden, kann man die in Aufgabe 1 empirisch gewonnenen Ergebnisse ganz einfach beweisen, indem man die vier Mittelwerte A, G, H und Q von x und y auf geeignete Weise geometrisch veranschaulicht.



Aufgabe 2
In der obigen Figur ist die aus x und y zusammengesetzte Strecke der Durchmesser eines Halbkreises.

a) Man zeige zunächst, dass die vier eingezeichneten roten Strecken die Längen $\frac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\frac{2xy}{x+y}$ und $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ haben und somit die vier Mittelwerte A, G, H und Q von x und y veranschaulichen.

b) Schließlich erläutere man, wie sich unmittelbar aus der geometrischen Figur die Ungleichungskette

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

zwischen den vier Mittelwerten von x und y ergibt, wobei Gleichheit jeweils genau dann gilt, wenn $x = y$ ist.