

Problem des Monats Oktober 2019

Summen aufeinanderfolgender Zahlen

Diesmal geht es um die Frage, ob und wenn ja, auf wie viele verschiedene Weisen sich eine natürliche Zahl als Summe aufeinanderfolgender Zahlen schreiben lässt. Beispielsweise hat 9 die zwei Darstellungen $9 = 4 + 5$ und $9 = 2 + 3 + 4$, wohingegen für 4 gar keine solche Zerlegung existiert.

Aufgabe 1

Zunächst könnte man sich z. B. dadurch einen ersten Überblick verschaffen, dass man für alle Zahlen bis 25 alle möglichen Zerlegungen als Summe aufeinanderfolgender Zahlen aufschreibt.

- Wie kann man jeweils sicherstellen, dass man wirklich alle Zerlegungen gefunden hat?
- Anhand dieser Beispiele ergeben sich wahrscheinlich schon einige Vermutungen, z. B. dahingehend, welche Zahlen sich als Summe von zwei oder drei oder vier oder fünf ... aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen lassen. Man versuche, sie zu begründen.

Aufgabe 2

- Wie viele verschiedene Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender Zahlen haben Zweierpotenzen bzw. Primzahlen, und warum ist das so?
- Man erläutere, wie die Antworten zu a) direkt aus den Beobachtungen in Aufgabe 3 folgen.

Aufgabe 3

- Warum ist eine ungerade Zahl > 1 stets als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen darstellbar, eine gerade Zahl aber niemals?
- Warum ist eine durch 3 bzw. 5 bzw. 7 ... teilbare Zahl stets als Summe von drei bzw. fünf bzw. sieben ... aufeinanderfolgenden Zahlen darstellbar?
Und warum ist umgekehrt eine durch 3 bzw. 5 bzw. 7 ... nicht teilbare Zahl niemals als Summe von drei bzw. fünf bzw. sieben ... aufeinanderfolgenden Zahlen darstellbar?
- Woran liegt es, dass die b) entsprechenden Aussagen für Teilbarkeit durch 2 bzw. 4 bzw. 6 ... nicht stimmen?

Stattdessen gilt für gerades g , dass man eine Zahl n genau dann in eine Summe von g aufeinanderfolgenden Zahlen zerlegen kann, wenn bei der Division von n durch g die Hälfte von g als Rest herauskommt. Warum ist das so?

Aufgabe 4

Der folgende Satz liefert eine vollständige Antwort auf das vorliegende Problem:

Eine Zahl besitzt genauso viele Zerlegungen als Summe aufeinanderfolgender Zahlen, wie sie ungerade Teiler > 1 hat.

- Man bestätige die Aussage des Satzes anhand der Zahl 27.
- Man begründe den Satz.