Problem des Monats April / Mai 2019

Kettenbrüche – Teil 2: Approximation irrationaler Zahlen und der Goldene Schnitt

Beim letzten Mal haben wir mithilfe des Euklidischen Algorithmus gesehen, dass sich genau die rationalen Zahlen als abbrechende Kettenbrüche darstellen lassen.

Aufgabe 1
Erläutere: Jede rationale Zahl hat genau zwei verschiedene Darstellungen als Kettenbruch – die Darstellung $[\ldots, a]$, wobei $a \geq 2$, ist nämlich gleichwertig zur um 1 längeren Darstellung $[\ldots, a-1, 1]$. Dabei liefert der Euklidische Algorithmus stets die erste dieser Darstellungen.

Andererseits kann gezeigt werden, dass sich jede irrationale Zahl eindeutig als unendlicher Kettenbruch darstellen lässt; z. B. gilt $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \ldots]$, $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ und $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$[1]. Wenn man einen solchen unendlichen Kettenbruch an verschiedenen Stellen abbricht, erhält man rationale Zahlen, die auf eine bestimmte Weise „beste“ rationale Näherungen der entsprechenden irrationalen Zahl sind.[2]

Aufgabe 2

a) Erläutere die Gültigkeit der Faustregel: Taucht in einer Kettenbruchdarstellung eine relativ große Zahl auf (bei π z. B. 15 oder, noch markanter, 292), und bricht man die Darstellung vor dieser großen Zahl ab, approximiert die sich ergebende rationale Zahl den ursprünglichen Kettenbruch besonders gut.

b) Aus a) folgt, dass $[3; 7]$ und $[3; 7, 15, 1] = [3; 7, 16]$ besonders gute rationale Näherungen für π sind. Berechne diese Brüche sowie den Näherungsfehler – zumindest einen der beiden Brüche dürftest du in diesem Zusammenhang schon gesehen haben, aber auch der andere war bereits den alten Chinesen bekannt.

Fibonacci-Rechtecke und der Goldene Schnitt

Die Fibonaccizahlen F_n sind bekanntlich $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, usw., wobei sich jede Zahl als Summe der beiden vorhergehenden ergibt.

Aufgabe 3

a) Bestimme die Kettenbruchentwicklungen der Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen (also von $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, usw.), und zeichne dabei auch die entsprechenden Rechteckszerlegungen, die sich aus dem Euklidischen Algorithmus ergeben.[3] Was fällt dabei auf?

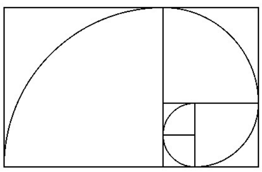
b) Folgere aus den Rechteckszerlegungen in a) die bekannte Formel $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Wie Aufgabe 3 a) zeigt, sind die Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen rationale Näherungen an die irrationale Zahl $[1; 1, 1, 1, \ldots]$, die laut der in Aufgabe 2 a) angesprochenen Faustregel „die am schlechtesten durch rationale Zahlen approximierbare irrationale Zahl“ ist. Man bezeichnet sie üblicherweise mit Φ und nennt sie den Goldenen Schnitt.

Aufgabe 4

a) Ermittle die ersten paar Stellen der Dezimalzahldarstellung von Φ.

b) Zeichne nochmals ein großes Rechteck mit den Seitenlängen F_{n+1} und F_n (z. B. passt ein 55×34-Rechteck noch gut auf ein kariertes DIN-A4-Blatt) und zerlege es in möglichst große Quadrate. Wenn du dabei „im Uhrzeigersinn“ vorgehst, kannst du in die Quadrate Viertelkreise einzeichnen, die zusammen eine Spirale ergeben (vgl. Abb.).



Das Rechteck aus Aufgabe 4 b) ist fast ein sogenanntes „Goldenes Rechteck“, da sein Seitenverhältnis näherungsweise Φ beträgt, und die Spirale ist fast eine „Goldene Spirale“. Angeblich empfinden viele Leute diese Proportionen als besonders ästhetisch. Du auch?

[1] Man kann zeigen, dass es für die erstaunliche Periodizität bei $\sqrt{2}$ einen bestimmten Grund gibt.
[2] Vgl. dazu auch das Problem des Monats November 2017.
[3] Siehe das Problem des Monats März 2019.