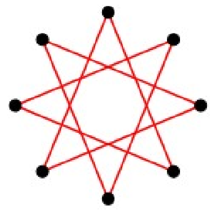
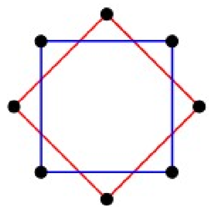
Problem des Monats Dezember 2018 / Januar 2019

Weihnachtssterne

Der Weihnachtsmann möchte in der Vorweihnachtszeit noch seine Wohnung dekorieren. Sein Kreativwichtel Ludwig der Schläfer schlägt ihm dazu vor, schöne Sterne zu basteln. Dazu soll der Weihnachtsmann zunächst einige Punkte regelmäßig kreisförmig anordnen und sie dann ringsum verbinden, wobei immer dieselbe Anzahl an Punkten „übersprungen“ wird.



Wenn man z. B. 8 Punkte nimmt und von jedem Punkt stets 3 Punkte weiterzeichnet, ergibt sich auf diese Weise der rechts abgebildete Stern. „Den nennt man auch Oktagramm“, erklärt Ludwig, „aber ich nenne ihn aufgrund seiner Konstruktion einfach $\{8|3\}$.“



„Mal schauen, ob ich es verstanden habe“, erwidert der Weihnachtsmann, „dann versuche ich es hier mal mit dem Stern $\{8|2\}$ … Uups!“ „Tja, es kann tatsächlich vorkommen, dass man bei diesem Verfahren gar nicht alle Punkte erreicht“, ergänzt Ludwig. „In solchen Fällen kannst du, wenn du möchtest, zusätzlich zur roten noch weitere Kopien übereinanderzeichnen, hier z. B. eine zusätzliche blaue Kopie. Das ist dann als Weihnachtsstern schon brauchbarer.“

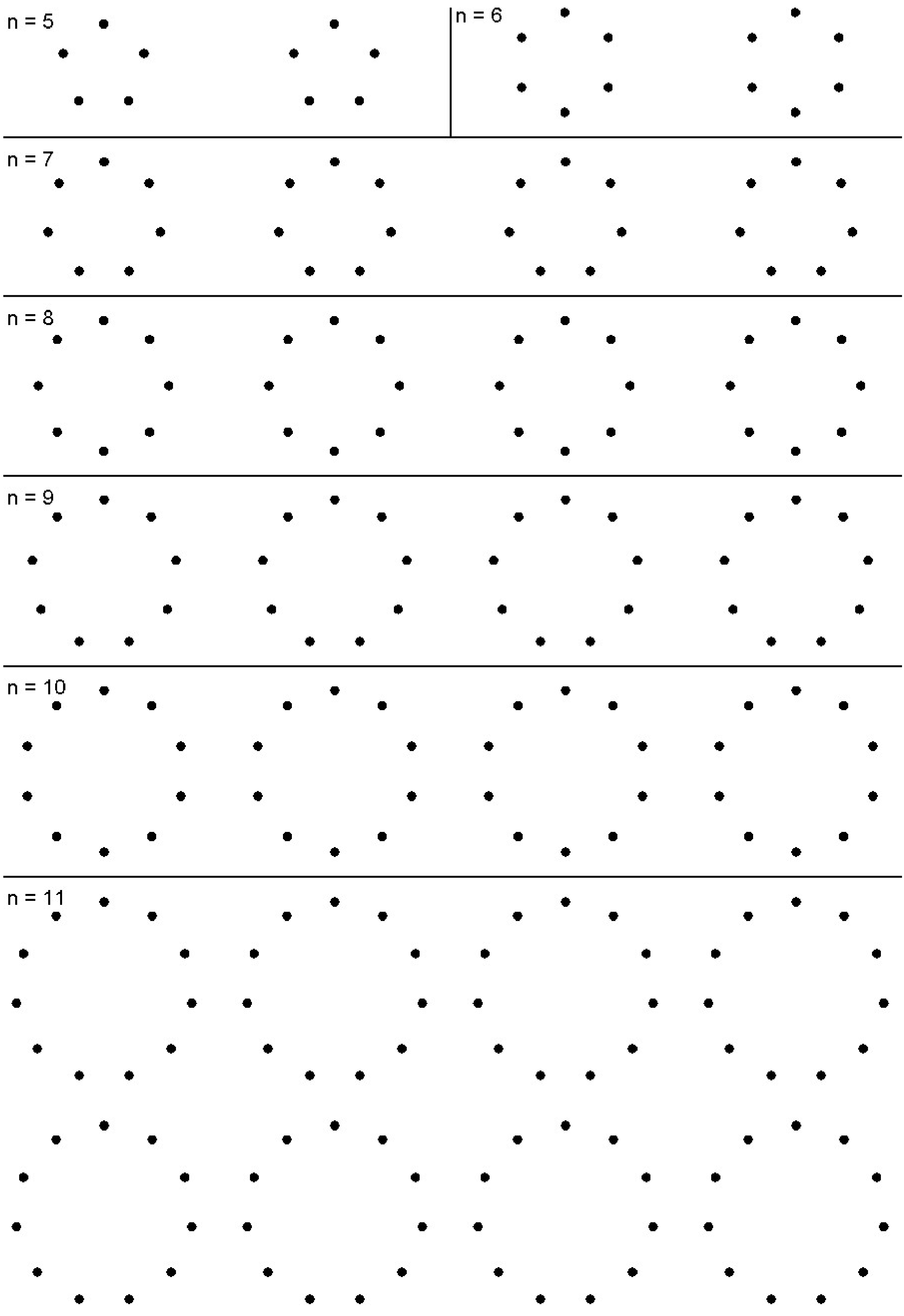
Aufgabe

Man konstruiere nach diesem Verfahren verschiedene Weihnachtssterne (dazu können auch die Vorlagen auf den nächsten Seiten verwendet werden). Dabei kann man zahlreiche Gesetzmäßigkeiten entdecken und begründen, unter anderem:

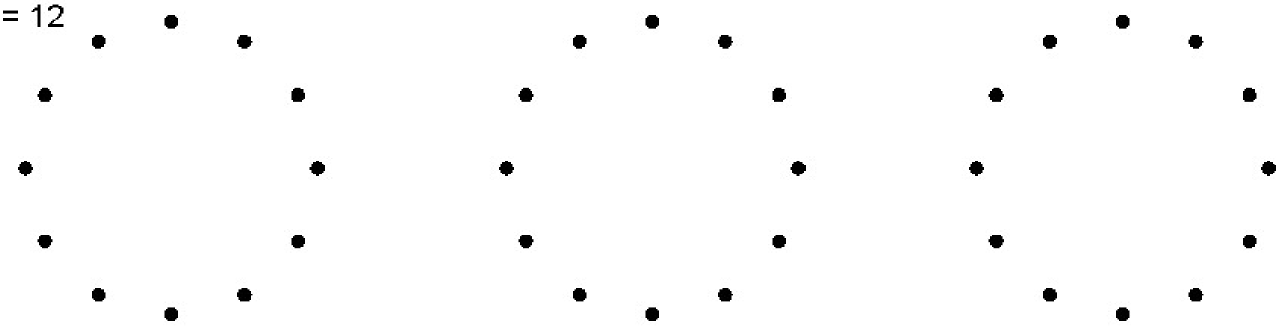
a) Wie viele Ecken hat der Stern $\{n|k\}$ je nach Wahl von n und k?
Beispiel: Wie man oben sieht, hat der Stern $\{8|3\}$ 8 Ecken, der Stern $\{8|2\}$ aber nur 4.

b) Wie viele „Umläufe“ werden beim Stern $\{n|k\}$ benötigt, bis man wieder am Startpunkt angelangt ist?
Beispiel: Bei $\{8|3\}$ sind es 3 Umläufe, bei $\{8|2\}$ ist es nur 1 Umlauf. Fasst man die oben abgebildeten beiden Kopien von $\{8|2\}$ als einen einzigen Stern auf, braucht man für diesen $2 \cdot 1$ Umlauf $= 2$ Umläufe.

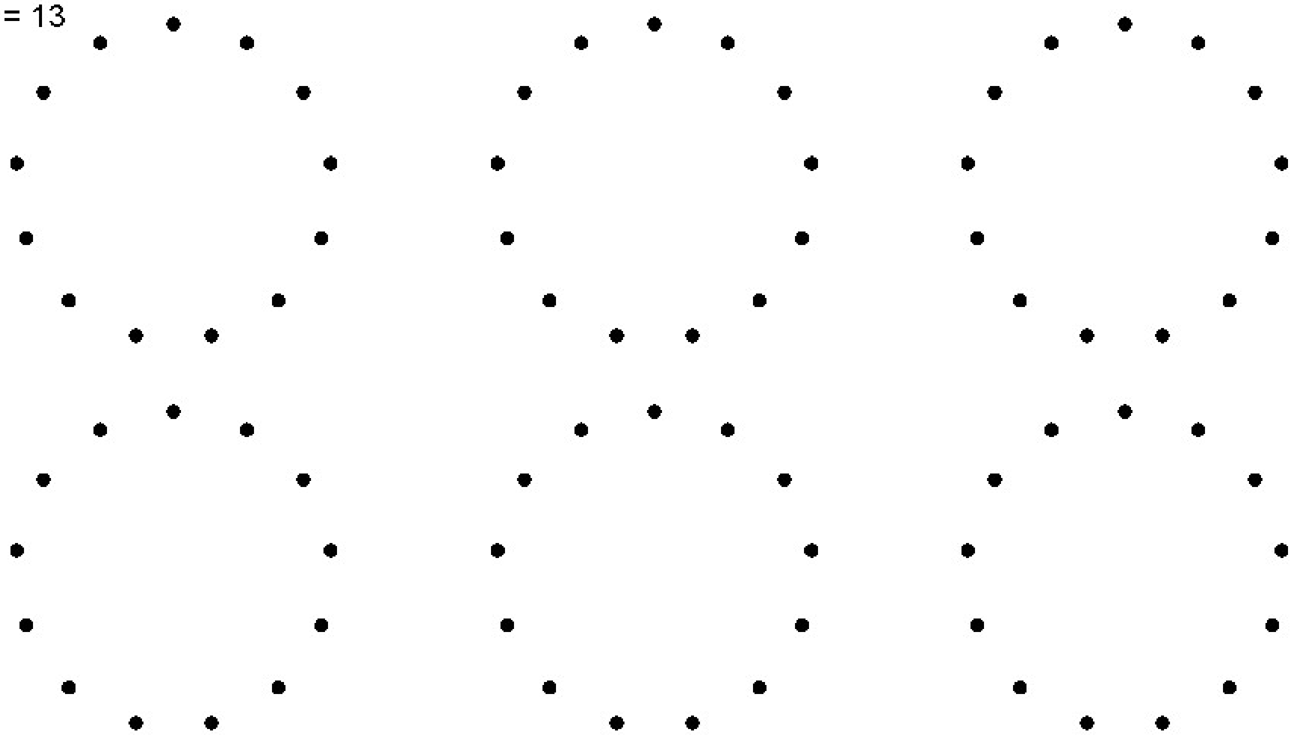
c) Aus wie vielen Teilflächen besteht der Stern $\{n|k\}$?
Beispiel: $\{8|3\}$ besteht aus 17 Teilflächen, $\{8|2\}$ aus nur 1 Teilfläche. Fasst man wieder die beiden Kopien von $\{8|2\}$ als einen einzigen Stern auf, besteht dieser aus 9 Teilflächen.


n = 5
n = 6
n = 7
n = 8
n = 9
n = 10
n = 11

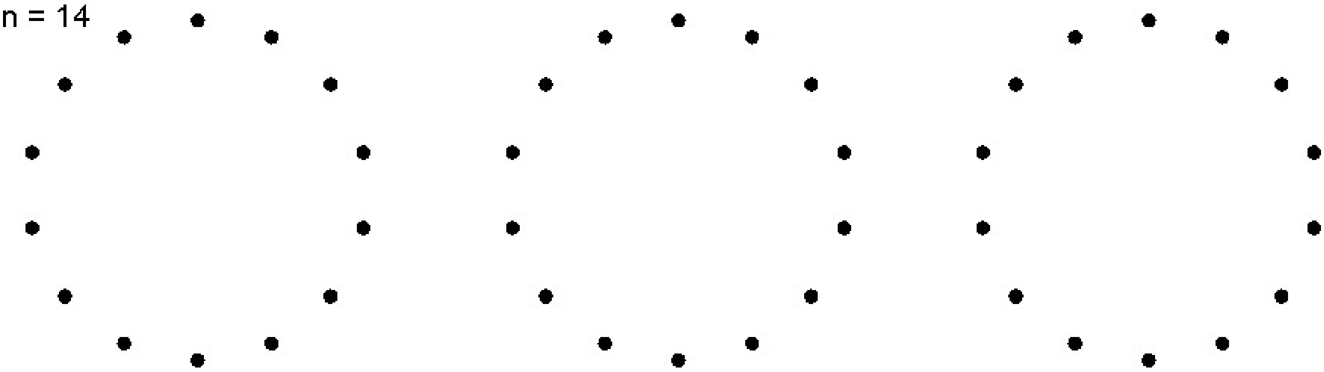
n = 12



n = 13



n = 14



n = 15