Problem des Monats November 2017

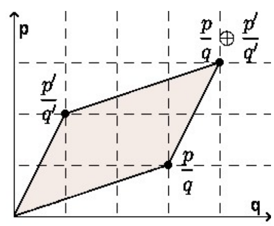
Der Uhrmacher des Weihnachtsmanns – Teil 1

Achille, der Uhrmacher des Weihnachtsmanns, sitzt gerade an ein paar Berechnungen, als der Weihnachtsmann hereinkommt und ihm über die Schulter schaut; „Ah, Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner. Du addierst also gerade Brüche. Wozu denn?“ Achille antwortet: „Naja, du solltest eigentlich wissen, dass man Brüche gerade *nicht* nach dieser Regel addiert. Trotzdem ist diese sogenannte Mediantenbildung zweier Brüche, also

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'},$$

für mich als Uhrmacher sehr interessant (dabei verwende ich $\oplus$ für die Mediantenbildung und $+$ für das gewöhnliche Addieren). Lass mich dir zuerst einmal die Mathematik zeigen, die dahintersteckt ...“[1]

Aufgabe 1
Der Bruch $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ liegt stets zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ (daher auch der Name „Mediante“).



Achille erklärt dem Weihnachtsmann, dass es zur Begründung dieser sowie der in Aufgabe 2 aufgeführten Eigenschaften[2] hilfreich sei, eine Veranschaulichung vor Augen zu haben (s. Abb.): Wenn man $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ als Punkte $(q|p)$ und $(q'|p')$ im Koordinatensystem interpretiert und ein Parallelogramm zeichnet, das diese beiden Punkte sowie $(0|0)$ als Ecken hat, dann ist $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ der vierte Eckpunkt.

Schrittweise Mediantenbildung und Näherungsbrüche

Achille weiter: „Schau jetzt mal, was ich hier mache: Beginnend mit $\frac{0}{1}$ und dem Ausdruck $\frac{1}{0}$ (welcher keiner Zahl entspricht, sondern nur symbolisch verwendet wird) füge ich in jedem Schritt die Mediante zwischen zwei benachbarten Brüchen ein. Dann ...“

	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{0}$
1. Schritt:	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{1}$				$\frac{1}{0}$
2. Schritt:	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{1}{0}$
3. Schritt:	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{0}$

usw.

Aufgabe 2

a) ... sind alle bei diesem Prozess auftretenden Brüche vollständig gekürzt.

b) ... wird jede (positive) rationale Zahl bei diesem Prozess irgendwann aufgelistet.“

Selbst dem Weihnachtsmann leuchtet nun ziemlich schnell ein, dass sich aus den Tatsachen in Aufgabe 2 die folgende Eigenschaft der schrittweisen Mediantenbildung ergibt:

> Wenn die reelle Zahl x durch diesen Prozess der schrittweisen Mediantenbildung eingeschachtelt wird, dann ist in jedem Schritt derjenige der beiden Brüche, der näher an x liegt, eine beste rationale Näherung an x in dem Sinne, dass alle anderen Brüche mit nicht größerem Nenner weiter von x entfernt sind.

„Nur um zu sehen, ob ich alles verstanden habe“, murmelt der Weihnachtsmann, „wenn ich also z. B. mal die Zahl $\sqrt{2}$ durch schrittweise Mediantenbildung einschachtele und dabei jeweils den näher an $\sqrt{2}$ liegenden Bruch markiere, sieht das ganze so aus:

$$\left[\frac{1}{1}^*; \frac{2}{1}\right], \quad \left[\frac{1}{1}; \frac{3}{2}^*\right], \quad \left[\frac{4}{3}^*; \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{7}{5}^*; \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{7}{5}^*; \frac{10}{7}\right], \quad \left[\frac{7}{5}; \frac{17}{12}^*\right], \quad \ldots$$

Und das heißt dann also, dass z. B. $\frac{4}{3}$ näher an $\sqrt{2}$ liegt als alle anderen Brüche, deren Nenner höchstens 3 ist?“
„Stimmt“, erwidert Achille, „und weil die nächstbeste Näherung $\frac{7}{5}$ ist, liegt $\frac{4}{3}$ sogar auch näher an $\sqrt{2}$ als alle anderen Brüche mit dem Nenner 4. Entsprechend erkennst du, dass $\frac{7}{5}$ von allen Brüchen mit kleinerem Nenner als 12 die beste Näherung von $\sqrt{2}$ ist!“

Aufgabe 3
Als kleine Übung zeige die Leserin dieser Kolumne noch, dass die Näherung $\pi \approx \frac{22}{7}$ von Archimedes schon ziemlich gut ist, weil sie die beste Näherung von π unter allen Brüchen mit kleinerem Nenner als 57 ist.

---

[1] Die Anwendung auf die Uhrmacherei folgt im kommenden Problem des Monats Dezember 2017 / Januar 2018.
[2] Siehe auch, falls nötig, die Hinweise zu den Aufgaben auf der nächsten Seite.

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

Die Steigungen der Ursprungsgeraden durch die Ecken des Parallelogramms entsprechen den Werten der zugehörigen Brüche.

Aufgabe 2

a) Das durch zwei beliebige Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ festgelegte Parallelogramm hat stets einen ganzzahligen Flächeninhalt, der zudem übereinstimmt mit den Flächeninhalten der beiden durch $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ sowie durch $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ und $\frac{p'}{q'}$ festgelegten Parallelogramme. Insbesondere haben alle Parallelogramme, die durch zwei bei diesem Prozess in irgendeinem Schritt benachbarte Brüche festgelegt sind, den Flächeninhalt 1. Falls bei diesem Prozess ein Bruch $\frac{np}{nq}$ mit einem Nachbarn $\frac{p'}{q'}$ vorkommt, hat das dadurch festgelegte Parallelogramm einen n-mal größeren Flächeninhalt als das durch $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ festgelegte.

b) Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $\frac{x}{y}$, die niemals vorkommt. Dann könnte man den Prozess so lange fortführen, bis in einem Schritt zwei benachbarte Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ vorkommen, die $\frac{x}{y}$ einschachteln und deren Nenner beide größer sind als y. Dann läge $\frac{x}{y}$ im Inneren des durch $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ festgelegten Parallelogramms, dessen Flächeninhalt 1 daher größer wäre als der ganzzahlige Flächeninhalt des durch $\frac{p}{q}$ und $\frac{x}{y}$ festgelegten Parallelogramms.