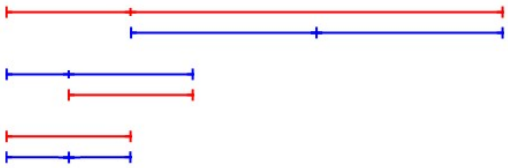
Problem des Monats März 2019

Kettenbrüche – Teil 1: Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus

Mit dem Euklidischen Algorithmus kann auf effiziente Art und Weise der ggT zweier Zahlen ermittelt werden. Als Beispiel zur Erinnerung[1] wird hier $\text{ggT}(24; 9)$ bestimmt (wobei das Ergebnis 3 lautet):



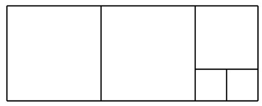
$24 = 2 \cdot 9 + 6$ ("9 passt 2-mal in 24 und 6 bleiben übrig")

$9 = 1 \cdot 6 + 3$ ("6 passt 1-mal in 9 und 3 bleiben übrig")

$6 = 2 \cdot 3$ ("3 passt 2-mal in 6")

Visualisierung des Euklidischen Algorithmus durch Zerlegung eines Rechtecks in möglichst große Quadrate

Wie die folgende Aufgabe zeigt, kann der Euklidische Algorithmus zur Bestimmmung von $\text{ggT}(24; 9)$ auch durch ein 24×9-Rechteck veranschaulicht werden, welches in möglichst große Quadrate zerlegt wird (s. rechts).

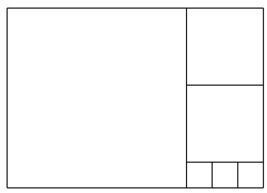


Aufgabe 1

a) Welche Seitenlängen haben die Quadrate im 24×9-Rechteck? Zeige auf diese Weise, dass tatsächlich $\text{ggT}(24; 9) = 3$ ist und mache dir klar, dass diese geometrische Darstellung genau die Informationen enthält, die als Rechenschritte oben in dem Beispiel auftauchen.

b) Bei Vergrößerung mit dem Faktor 2 hat das Rechteck die Maße 48×18 und bei Verkleinerung mit dem Faktor 3 die Maße 8×3. Was folgt hieraus für die Beziehung von $\text{ggT}(24; 9)$ zu $\text{ggT}(48; 18)$ bzw. $\text{ggT}(8; 3)$?

Aufgabe 2



a) Von welchen Zahlen könnte in der rechten Abb. der ggT bestimmt worden sein, und was ist das Ergebnis? Gib mehrere Möglichkeiten an.

b) Bestimme $\text{ggT}(11; 4)$ bzw. $\text{ggT}(26; 20)$ bzw. $\text{ggT}(39; 16)$ durch Zerlegung geeigneter Rechtecke in möglichst große Quadrate.

Kettenbruchdarstellung rationaler Zahlen und Euklidischer Algorithmus

Ein Kettenbruch ist ein gemischter Bruch (das soll hier bedeuten: eine natürliche Zahl plus ein Bruch mit dem Zähler 1), bei dem im Nenner wieder ein gemischter Bruch steht, usw. Zum Beispiel kann man $\frac{24}{9}$ folgendermaßen als Kettenbruch darstellen:

$$\frac{24}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{6}} = \underline{2} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}} \qquad \text{(Unterstreichungen hier nur zur Verdeutlichung).}$$

Dafür schreibt man üblicherweise auch kurz $\frac{24}{9} = [2; 1, 2]$.

Aufgabe 3

Die Darstellung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ als Kettenbruch ist im Prinzip nichts anderes, als per Euklidischem Algorithmus $\text{ggT}(a; b)$ zu berechnen (woraus insbesondere folgt, dass sich jede rationale Zahl als Kettenbruch darstellen lässt). Mache dir das klar, indem du anhand der obigen Zerlegung eines 24×9-Rechtecks in möglichst große Quadrate erläuterst, dass diese geometrische Darstellung genau dieselben Informationen enthält wie die Darstellung von $\frac{24}{9}$ als Kettenbruch.

Aufgabe 4

a) Lies aus den Rechteckszerlegungen in Aufgabe 2 b) die Kettenbruchdarstellungen von $\frac{11}{4}$ bzw. $\frac{26}{20}$ bzw. $\frac{39}{16}$ ab. Kontrolliere die Ergebnisse, indem du diese Kettenbrüche rechnerisch vereinfachst.

b) Skizziere die zu den Kettenbruchdarstellungen $[3; 1, 4]$ bzw. $[2; 2, 2, 2]$ gehörigen Rechteckszerlegungen und lies aus den Seitenlängen ab, welche rationalen Zahlen diese Kettenbruchdarstellungen besitzen. Kontrolliere die Ergebnisse, indem du diese rationalen Zahlen rechnerisch in Kettenbrüche umwandelst.

c) Erläutere sowohl rechnerisch anhand der Kettenbruchdarstellungen als auch geometrisch anhand der zugehörigen Rechteckszerlegungen, welchen Zahlen sich $[1; 1, n]$ bzw. $[1; 1, 1, n]$ annähern, wenn n immer größer wird.

[1] Siehe das Problem des Monats November 2011 für eine weitere Darstellung der Funktionsweise des Euklidischen Algorithmus.