Eine (nicht vollständige) Anleitung zur Nutzung der *Geogebra Rechner Suite*

Dr. Dirk Calow, Gymnasium Nepomucenum Cosefeld

19. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Der CAS Rechner **3**

2.1 Nutzung als wissenschaftlicher Taschenrechner 3

2.2 Lösung von Gleichungen 4

2.3 Untersuchung von Funktionen 6

2.3.1 Graphische Darstellung 7

2.3.2 Wertetabelle 8

2.3.3 Nullstellen 9

2.3.4 Lokale Extrempunkte, Wendepunkte 9

2.4 Differential- und Integralrechnung 10

2.4.1 Bestimmung der Ableitungen einer Funktion 10

2.4.2 Bestimmung der Stammfunktion (unbestimmtes Integral) 12

2.4.3 Bestimmung eines bestimmten Integrals 13

1 Einleitung

Um Geogebra Rechner Suite effektiv im Unterricht und auch während der Klausuren einsetzen zu können, sollte man auf die wichtigsten Funktionen und Methoden in Geogebra schnell zugreifen können und deren richtige Anwendung verstehen.

Diese kurze Anleitung ist als Einführung und auch als schnelle Hilfe für die Anwendung von Geogebra gedacht.

Falls das vorliegende Dokument nicht ausreicht, findet Ihr ein ausführliches Tutorium für Geogebra unter

https://www.geogebra.org/m/pug8qwmb .

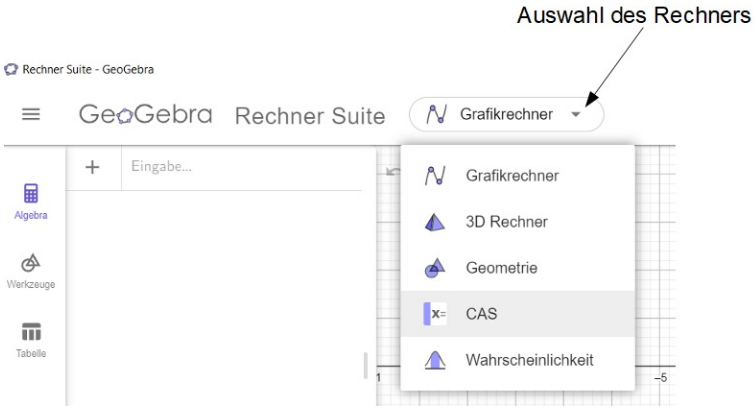
Um Geogebra verwenden zu können, könnt Ihr Euch die app unter

https://www.geogebra.org/download herunterladen oder unter

https://www.geogebra.org/calculator online verwenden.

Die app Geogebra Rechner Suite beinhaltet die vier Rechnerarten *Graphikrechner*, *3D Rechner*, *Geometrie*, *CAS* und *Wahrscheinlichkeitsrechner*.

Die Auswahl des Rechners, den man nutzen möchte, lässt sich wie folgt vornehmen.



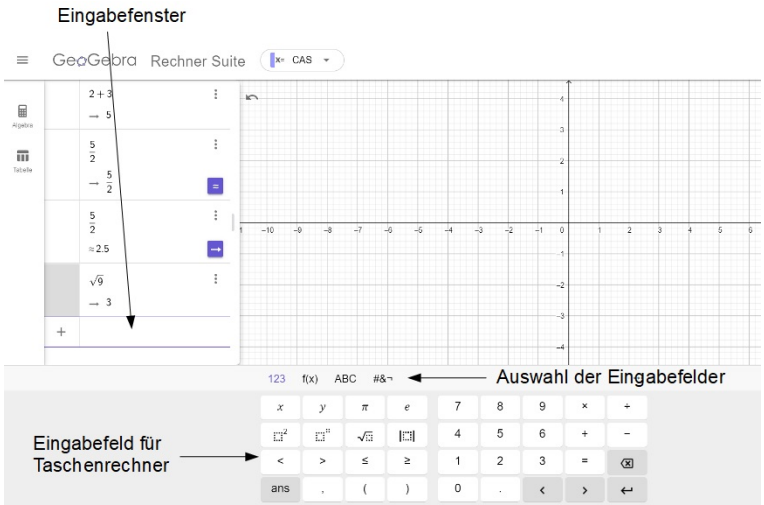
Im Unterricht werden am häufigsten die Rechner CAS (Computeralgebrasystem) (EF, Q1, Q2), 3D Rechner (Q1, Q2) und der Wahrscheinlichkeitsrechner (Q2) eingesetzt.

2 Der CAS Rechner

CAS ist die Abkürzung für Computer Algebra System. Es ist der Rechner, der am häufigsten im Unterricht verwendet wird.

2.1 Nutzung als wissenschaftlicher Taschenrechner

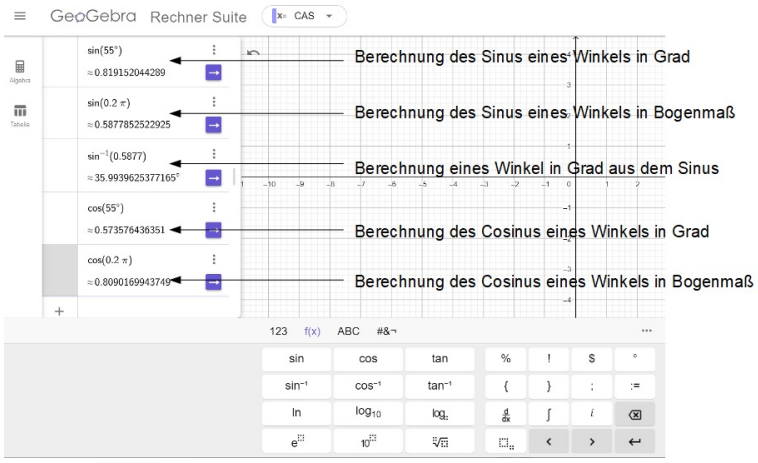
Öffnet man den CAS Rechner, so sieht man das folgende Bild.



In das Eingabefenster gibt man die auszuführenden Operationen ein. Eingaben sind über die Tastatur möglich. Ist keine Tastatur und nur ein Touchscreen vorhanden, müssen die verschiedenen Eingabefelder zur Eingabe genutzt werden.

Eingabefeld 123: Mit diesem Eingabefeld kann man nun einfache Berechnungen mit Hilfe der Grundrechenarten ausführen, Potenzen und Wurzeln berechnen.
In diesem Eingabefeldes stehen auch die Konstanten π und die Eulerische Zahl e zur Verfügung. Die Taste **ans** befördert das letzte Ergebnis zur weiteren Verwendung in das nächste Eingabefenster.

Eingabefeld f(x): Im linkem Teil dieses Eingabefelds stehen wichtige Funktionen wie die trigonometrischen Funktionen sin(), cos() und tan() und deren Umkehrfunktionen und die Logarithmusfunktionen ln() (natürlicher Logarithmus zur Basis e), lg() (Logarithmus zur Basis 10) und $\log_a()$ (Logarithmus zur Basis a) zur Verfügung.



In der Abbildung sind beispielhaft die Nutzung der trigonometrischen Funktionen gezeigt.

Vorsicht ist bei der Berechnung entweder in Grad oder in Bogenmaß geboten. Geogebra scheint bei der Benutzung von sin und cos das Grad-Zeichen ° selbstständig und auch willkürlich an den Zahlenwert anzuhängen. Möchte man mit Winkeln im Bogenmaß arbeiten, muss man das Grad-Zeichen per Hand entfernen oder Vielfache von π einsetzen.

Auch bei der Berechnung des Winkels mit Hilfe der Umkehrfunktionen gibt Geogebra scheinbar willkürlich das Ergebnis manchmal in Grad (erkennbar am °) oder in Bogenmaß aus.

Der rechte Teil des Eingabefelds f(x) wartet mit Symbolen auf, auf deren Bedeutung noch später zurückgekommenen wird.

Eingabefelder ABC und #&? Diese Eingabefelder stellen zusammen die Tastatur dar, mit denen man Funktionen, Rechenbefehle usw. in das Eingabefenster eingeben kann

2.2 Lösung von Gleichungen

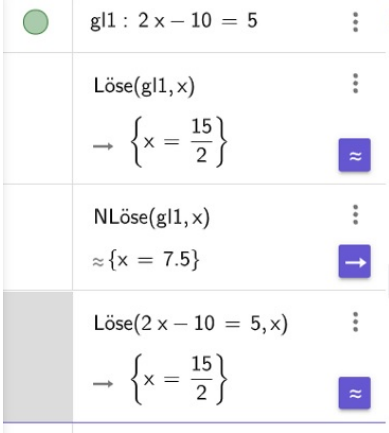
Befehl: **Löse({Liste von Gleichungen}, {Liste von Variablen})**

Eine der wichtigsten Problemstellungen in der Mathematik stellt das Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen dar.

Der Befehl zur Lösung von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen ist dabei der Befehl **Löse()**.

Die Anwendung des Befehls Löse() soll an einigen Beispielen demonstriert werden.

1. Lineare Gleichung: $2x - 10 = 5$



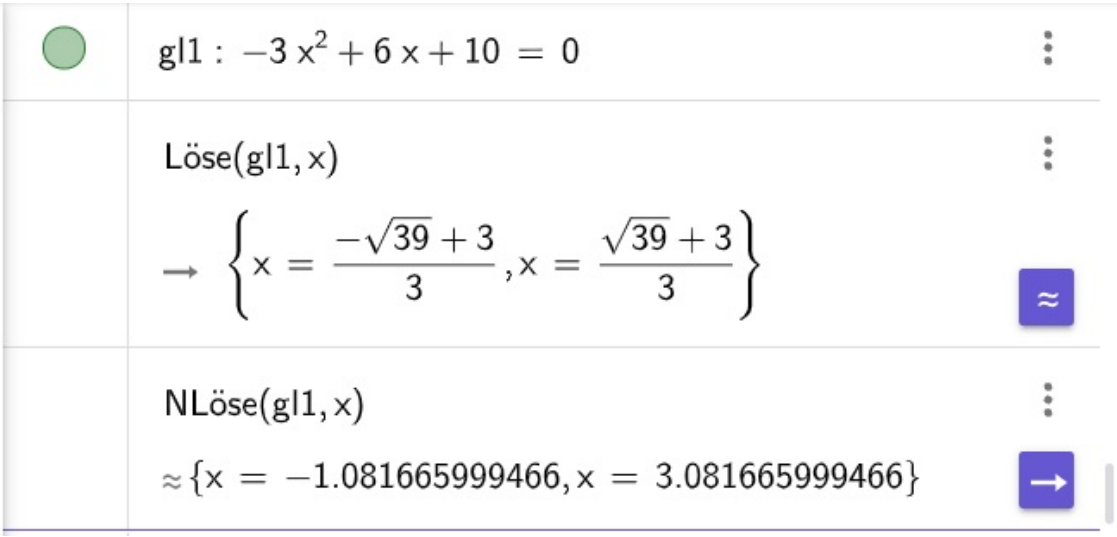
Gleichung eingeben und mit gl1 beschriften.

Gleichung mit Löse() lösen. Lösung x=7.5
Löse() findet die Lösung durch Verwendung algebraischer Methoden (durch Rechnen)

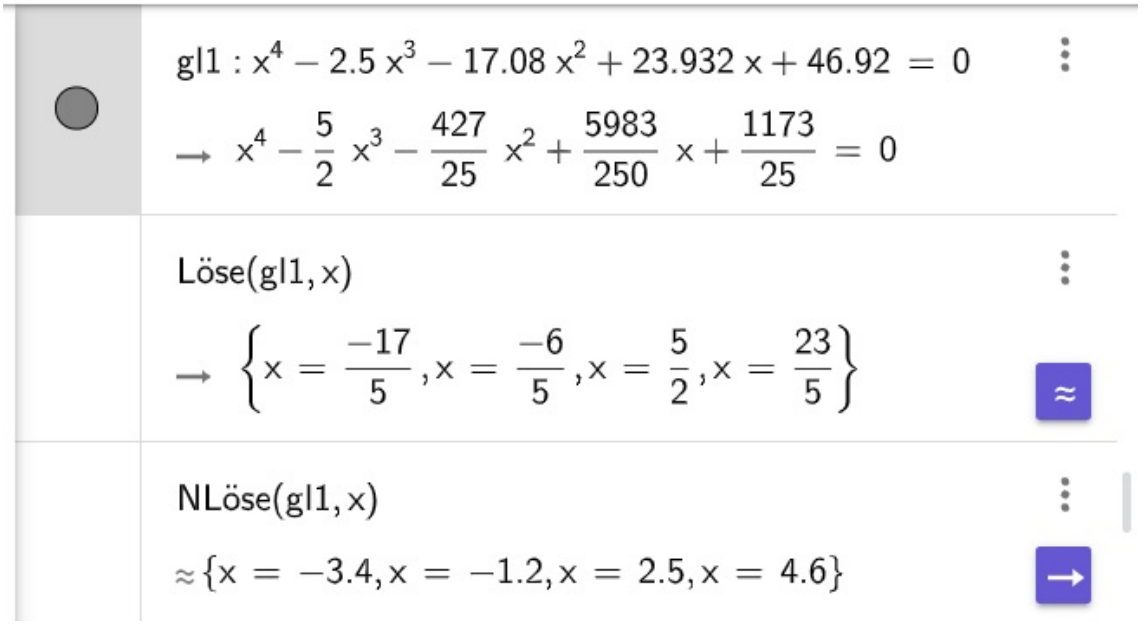
NLöse() sucht eine Lösung für die Gleichung unter Verwendung numerischer Methoden (Methodisches Probieren).

Es ist möglich, die Gleichung direkt in Löse() einzutragen.

2. quadratische Gleichung $-3x^2 + 6x + 10 = 0$



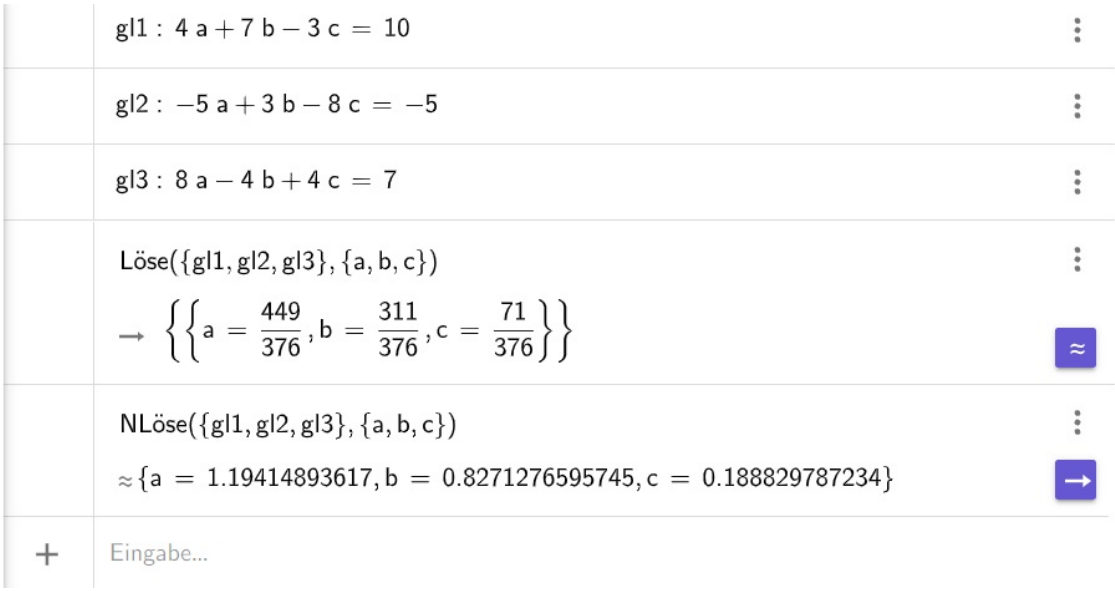
3. Wurzeln eines Polynoms $x^4 - 2.5x^3 - 17.08x^2 + 23.932x + 46.92 = 0$



4. bestimmtes lineares Gleichungssystem

$$4a + 7b - 3c = 10$$

$$
\begin{aligned}
-5a + 3b - 8c &= -5 \\
8a - 4b + 4c &= 7
\end{aligned}
$$



Der Befehl Löse() löst auch nichtlineare Gleichungssysteme und ebenfalls unterbestimmte und überbestimmte lineare Gleichungssysteme.

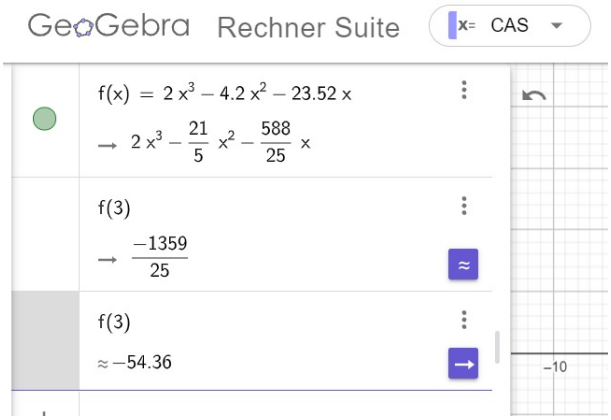
2.3 Untersuchung von Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ ordnet jedem Argument $x \in \mathbb{R}$ einen und nur einen Funktionswert $f(x) \in \mathbb{R}$ zu.

Eine Funktion kann durch eine Funktionsgleichung gegeben sein. Diese Funktionsgleichung stellt die Rechenvorschrift dar, wie aus dem Argument x der Funktionswert $f(x)$ berechnet wird.

Beispiele von Funktionen: $f(x) = -4x+3$, $f(x) = +3x^2-5x+7$, $f(x) = -4x^5+0.5x^3+5x+7$, $f(x) = 10 \cdot 5^x$ usw.

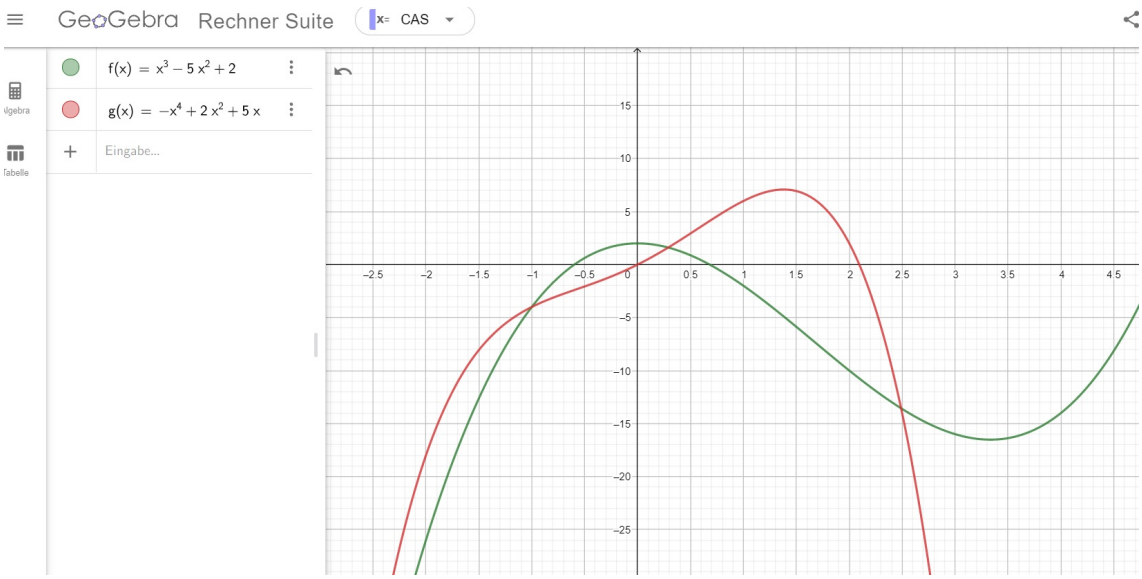
Setzt man für x einen Wert (z.B. $x = 3$) in $f(x)$ ein, so erhält den Funktionswert $f(x)$. In Geogebra sieht das so aus:



2.3.1 Graphische Darstellung

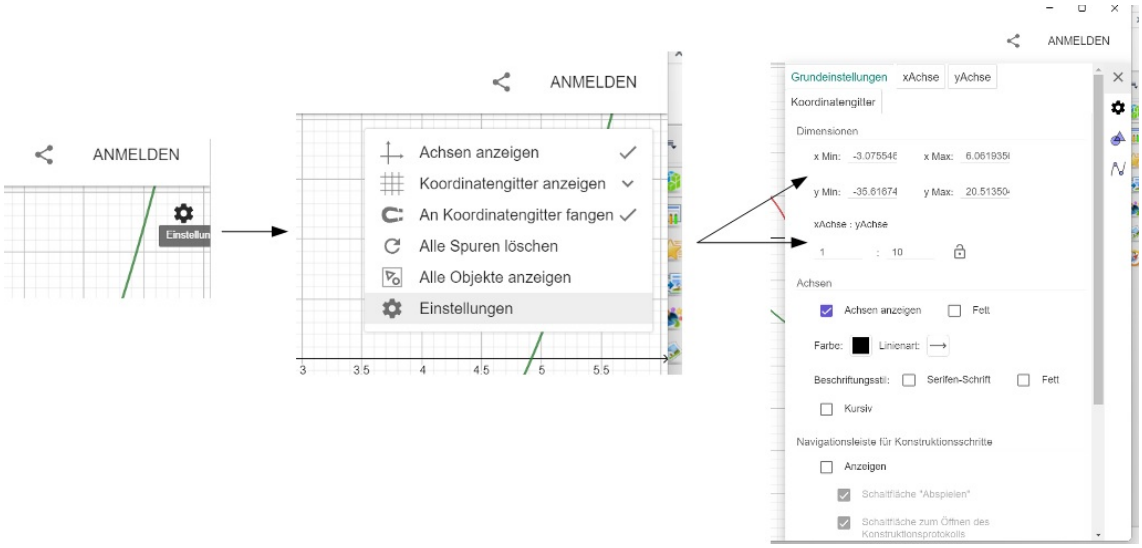
Ist eine Funktion $f(x)$ gegeben, so stellt die Menge aller Punkte $(x|f(x)$ im zwei dimensionalen Koordinatensystem den Graphen der Funktion dar.

Gibt man eine Funktionsgleichung in Geogebra ein, wird rechts im Graphikfenster sofort der Graph der Funktion angezeigt.



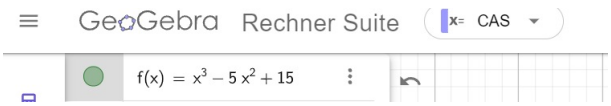
Man kann auch mehrere Funktionen eingeben. Geogebra ordnet jeder Funktion eine andere Farbe zu. Wichtig ist, dass man unterschiedlichen Funktionen auch unterschiedliche Namen gibt. Im Bild sind das $f(x)$ und $g(x)$.

Geogebra bildet die Funktion automatisch im Verhältnis der Koordinatenachsen von $1:1$ ab. Oft kann man damit den Graphen der Funktion nicht sehen. Unter Einstellungen kann man dieses Verhältnis ändern.

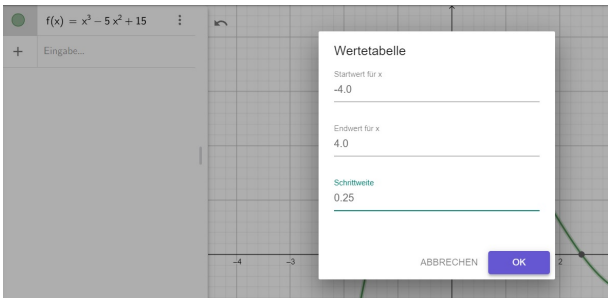


2.3.2 Wertetabelle

Man kann sich von der Funktion eine Wertetabelle anzeigen lassen.

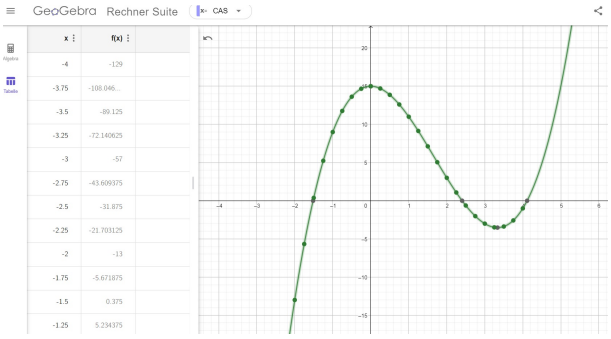


Drückt man auf die 3 Pünktchen neben der Funktionsgleichung, so erscheint ein Feld mit verschiedenen Optionen. Geht man auf die Option Wertetabelle, dann erscheint das folgende Fenster.



In diesem Fenster kann man Anfangsstelle, Endstelle und Schrittweite der Tabelle einstellen.

Die Wertetabelle sieht dann so aus.



2.3.3 Nullstellen

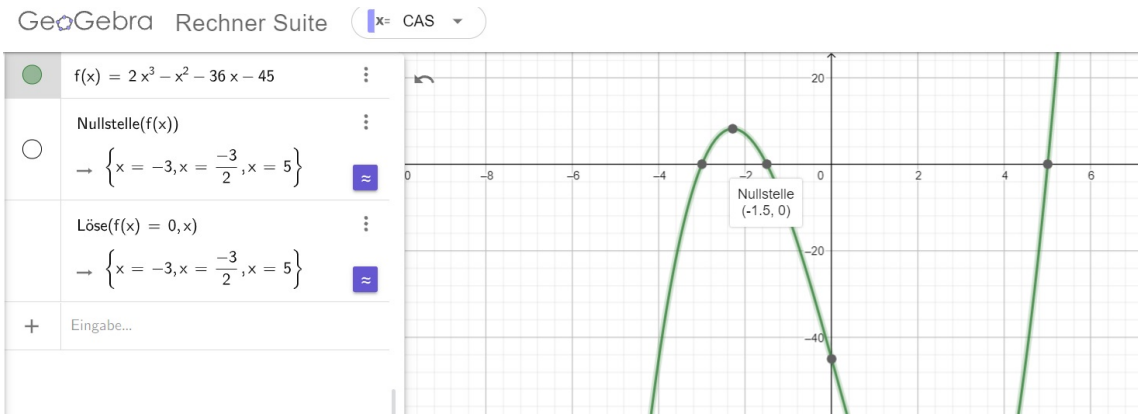
Befehl: **Nullstelle(Funktion)**

Um die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ mit dem CAS-Rechner von Geogebra zu bestimmen gibt es mehrere Möglichkeiten.

1. Tippt man auf den Graphen der Funktion, so werden besonderen Punkte der Funktion markiert. Man tippt auf die Nullstellen im Graphen und die Argumente für die Nullstellen werden angezeigt.
2. Der Befehl **Nullstelle(f(x))** gibt alle Nullstellen der Funktion $f(x)$ an.
3. Die dritte Möglichkeit besteht darin, die Gleichung

   $$f(x) = 0$$

   mit dem Befehl **Löse(f(x)=0,x)** zu lösen. Die Lösungen sind die Nullstellen.



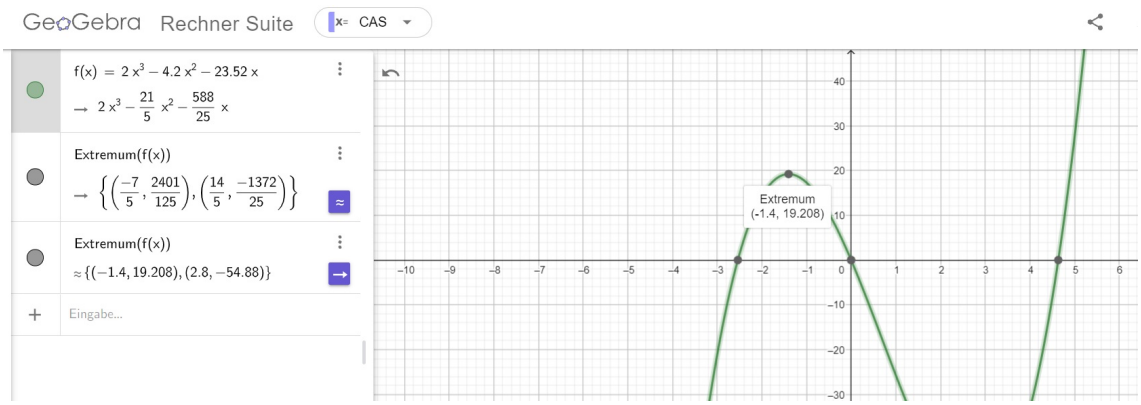
2.3.4 Lokale Extrempunkte, Wendepunkte

Befehl: **Extremum(Funktion)**

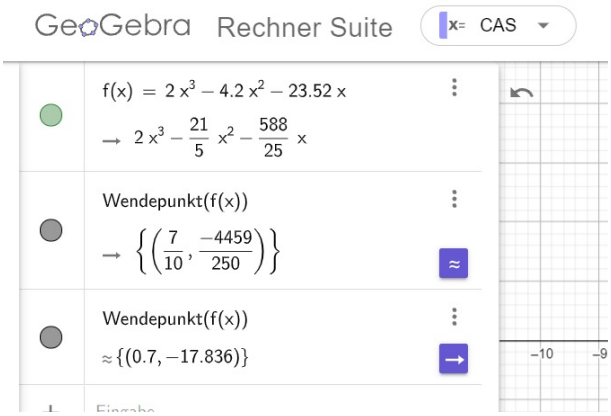
Befehl:**Wendepunkt(Funktion)**

Um die lokalen Extrempunkte einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen gibt es ebenfalls zwei Möglichkeiten.

1. Man tippt auf den entsprechenden Hoch bzw. Tiefpunkt und die Koordinaten des Punktes werden angezeigt.
2. Man ermittelt die Extrema der Funktion $f(x)$ mit dem Befehl **Extremum(f(x))**. Mit diesem Befehl werden die Koordinaten der lokalen Extrema der Funktion $f(x)$ angezeigt.



Um die Wendepunkte einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, gibt man den Befehl **Wendepunkt(f(x))** ein, und die Koordinaten der Wendepunkte werden angezeigt.



2.4 Differential- und Integralrechnung

2.4.1 Bestimmung der Ableitungen einer Funktion

Befehl: **Ableitung(Funktion, Variable)**

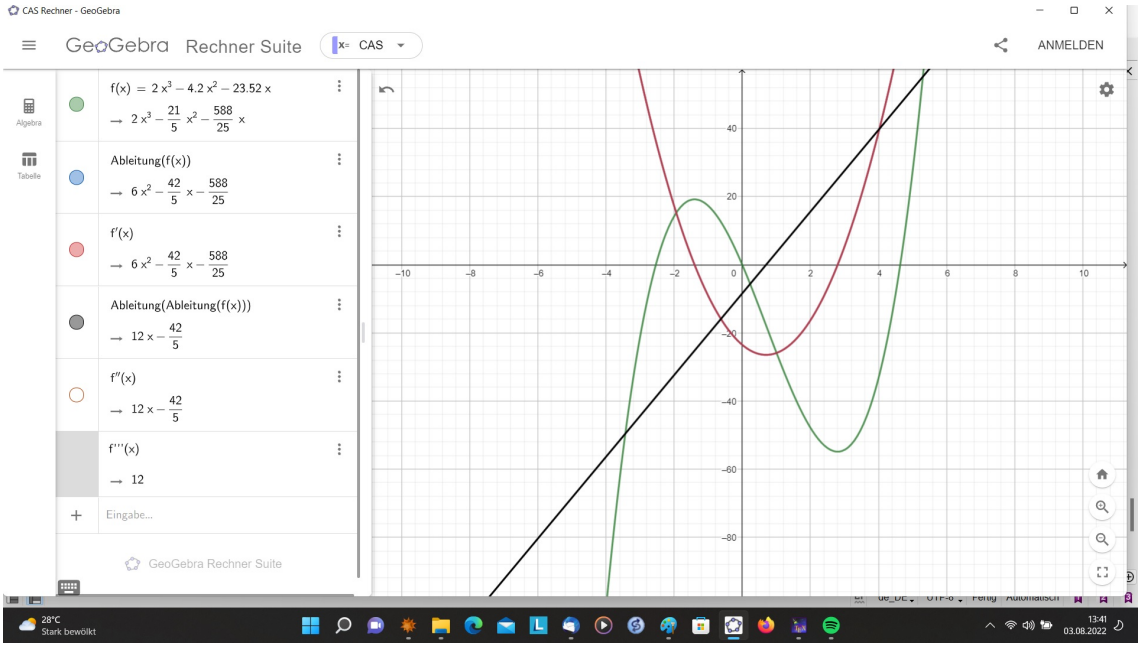
Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ kann durch zwei Möglichkeiten bestimmt werden:

1. mit dem Befehl **Ableitung(f(x),x)**.

2. indem man die Konvention, die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ als $f'(x)$ zu schreiben, direkt in Geogebra nutzt.

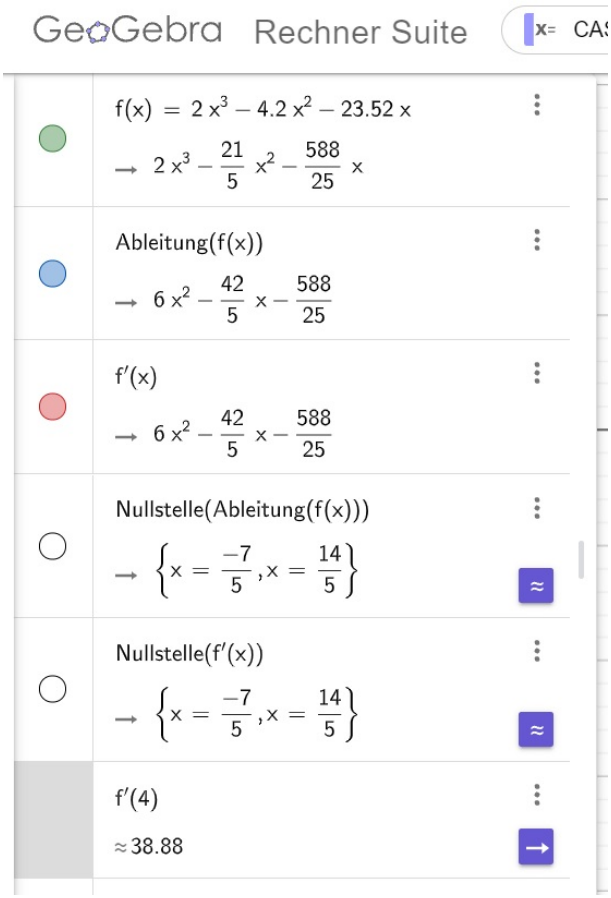
Die Hintereinanderausführung beider Befehle führt zu den höheren Ableitungen.

Der Graph der Ableitungsfunktion wird in Geogebra automatisch angezeigt.



Möchte man bestimmte Funktionswerte oder Nullstellen bzw. Extrempunkte der Ableitungen bestimmen, geht man wie im Abschnitt 2.3 beschrieben vor.

Zum Beispiel:

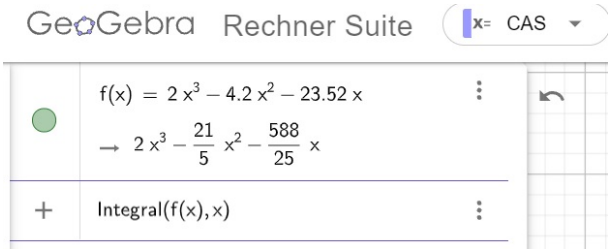


2.4.2 Bestimmung der Stammfunktion (unbestimmtes Integral)

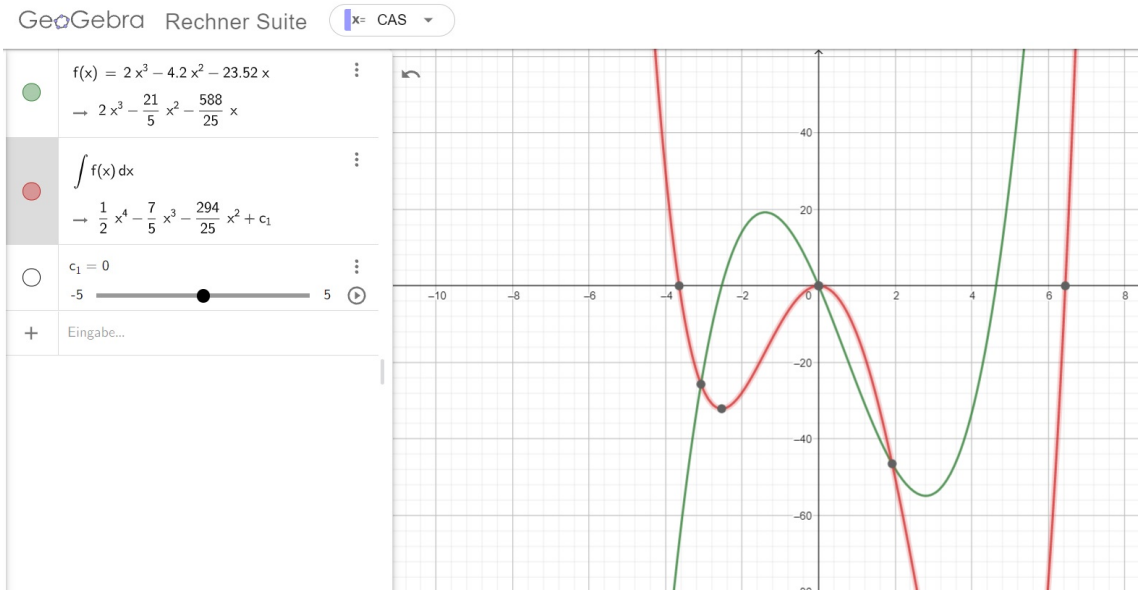
Befehl: **Integral(Funktion, Variable)**

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt $F'(x) = f(x)$. Zwei Stammfunktionen von $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante c.

Geogebra erlaubt es, Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ durch den Befehl **Integral(f(x),x)** zu bestimmen.



Führt man diesen Befehl aus, ändert Geogebra den Befehl **Integral(f(x),x)** in die Schreibweise für das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ mit dem Integralzeichen $\int$.



Geogebra setzt in der Funktionsgleichung für die Stammfunktion korrekterweise eine additive Konstante c ein. Damit werden alle möglichen Stammfunktionen beschrieben.

Ebenfalls wird der Graph der Stammfunktion $F(x)$ angezeigt. Durch einen Schieberegler kann der Wert der Konstante c verändert und das Verhalten des Graphen beobachtet werden.

2.4.3 Bestimmung eines bestimmten Integrals

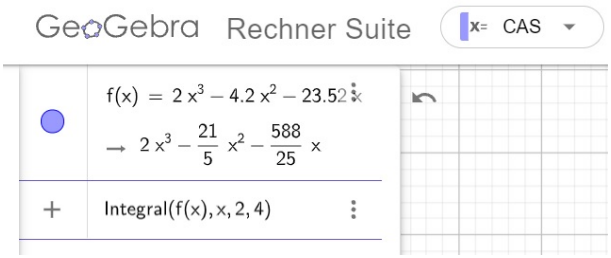
Befehl: **Integral(Funktion, Variable, untere Grenze, obere Grenze)**

Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist definiert als

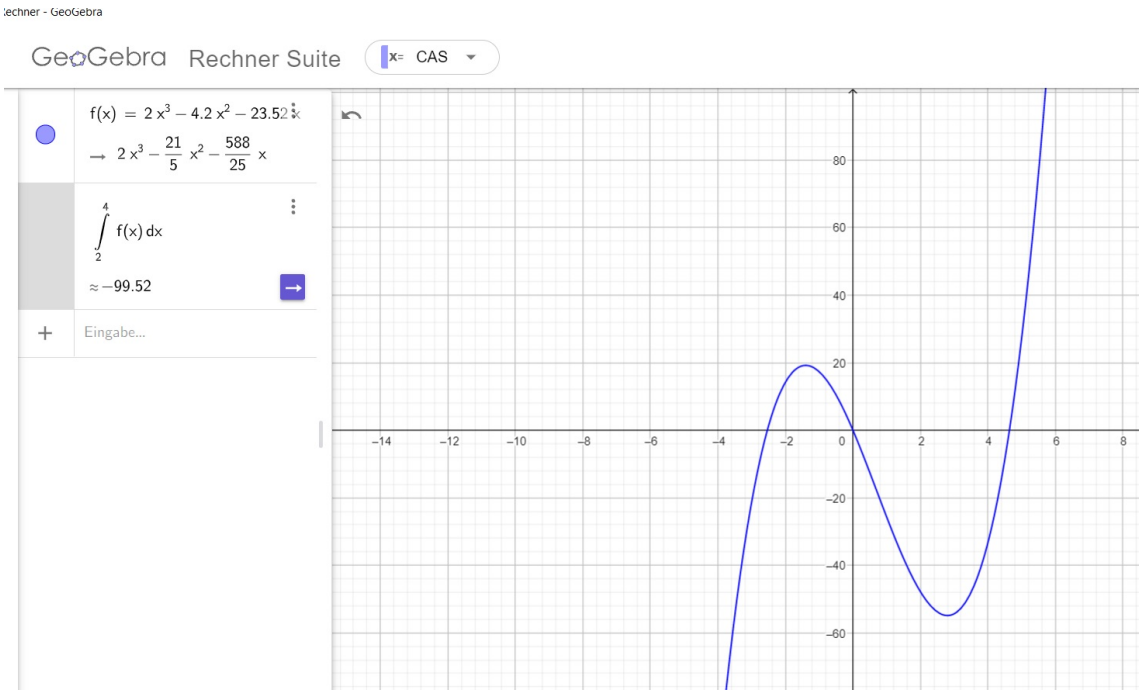
$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ein bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ bestimmt man mit dem Befehl **Integral(f(x), x, a, b)**.

In der Abbildung soll zum Beispiel das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $[2, 4]$ bestimmt werden.



Auch hier ändert Geogebra die Schreibweise in die Notation mit dem Integralzeichen.



Das Ergebnis des bestimmten Integrals ist immer eine Zahl.