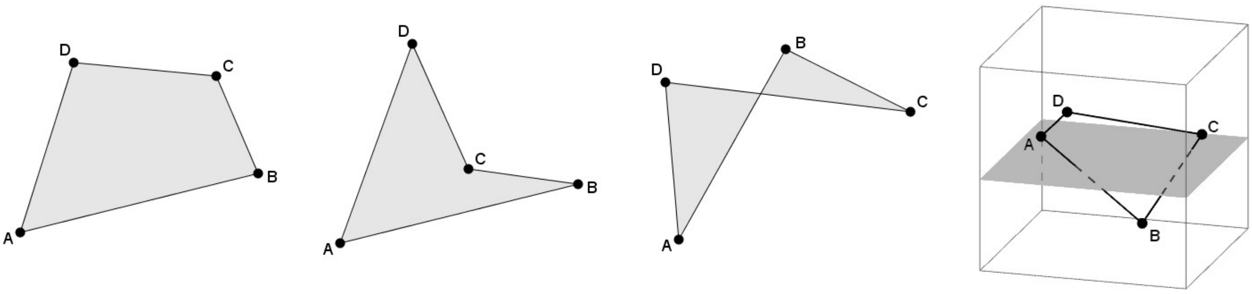
Problem des Monats September / Oktober 2018

Das Varignon-Parallelogramm

Es gibt zahlreiche interessante Ergebnisse aus der elementaren Geometrie, die üblicherweise nicht im Schulunterricht erwähnt werden, obwohl dies vom Niveau her problemlos möglich wäre. Von diesen versteckten Juwelen ist vielleicht ein Satz über eine Eigenschaft beliebiger Vierecke am verblüffendsten, der nach seinem Entdecker Pierre Varignon (1654-1722) benannt ist.

Hierzu nehme man ein *beliebiges* Viereck (s. Abb. von links nach rechts: dieses Viereck muss nicht konvex, sondern kann auch konkav sein, es darf sich sogar selbst überschneiden, ja seine Ecken müssen nicht einmal auf einer Ebene liegen).



In diesem beliebigen Viereck verbinde man benachbarte Seitenmittelpunkte zu einem weiteren Viereck.

Aufgabe 1
Untersuche für beliebige Vierecke jeweils dieses „Mittenviereck“ (offensichtlich bietet sich dazu die Verwendung einer Dynamische-Geometrie-Software an). Welche erstaunliche Entdeckung machst du? Auch ein Beweis ist nicht allzu schwer.

Aufgabe 2
Untersuche folgende Eigenschaften des Varignon-Parallelogramms und beweise deine Vermutungen.

a) Wie groß ist der Umfang des Varignon-Parallelogramms im Vergleich zur Länge der beiden Diagonalen des ursprünglichen Vierecks?

b) Für konvexe und konkave Vierecke: Wie groß ist der Flächeninhalt des Varignon-Parallelogramms im Vergleich zum Flächeninhalt des ursprünglichen Vierecks?

   Gilt das Ergebnis auch für sich selbst überschneidende Vierecke? (Dazu definiert man den Flächeninhalt eines solchen Vierecks meist als die Differenz der beiden dreieckigen Teilflächen.)

c) Für welche Vierecke ist das Varignon-Parallelogramm sogar eine Raute oder ein Rechteck? Wann ist es also ein Quadrat?

Aufgabe 3
Verbindet man in einem Viereck die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten, erhält man die sogenannten Bimedianten des Vierecks. Man beweise mithilfe des Satzes von Varignon:

In jedem beliebigen Viereck halbieren sich die Bimedianten; zudem verläuft auch die Verbindung der Diagonalenmittelpunkte durch den Bimediantenschnittpunkt und wird von ihm halbiert.