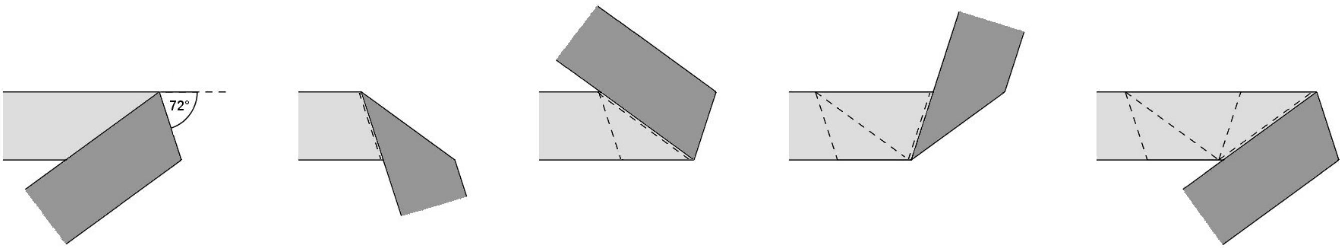
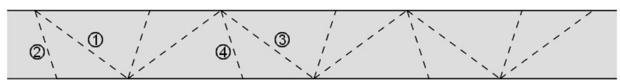
Problem des Monats April / Mai 2018

Regelmäßige Vielecke falten

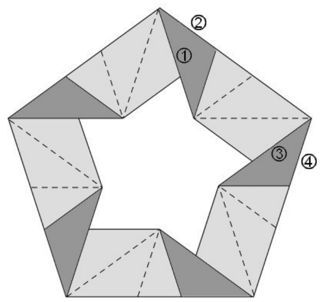
Es gibt ein sehr schönes Verfahren zur Faltung regelmäßiger Vielecke, das einfach, beliebig genau und verallgemeinerbar ist. Dazu wird ein nicht zu schmaler, hinreichend langer Papierstreifen benötigt (z. B. 3 cm breit und etwa 50 cm lang für ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Faltanleitung folgt):



Zuerst faltet man nach unten (kurz: D) und erzeugt dabei einen Winkel von 72° (s. Abb. oben), den man vorher mit dem Geodreieck markiert hatte. Danach faltet man in jedem Schritt entlang der zuletzt entstandenen Faltkante, und zwar zunächst noch einmal D, daraufhin zweimal hoch (kurz: U). Diese Abfolge wiederholt man hinreichend oft: $DDUUDDUU\ldots$ (kurz: D^2U^2).



Den entstandenen gefalteten Papierstreifen (s. Abb. rechts) kann man nun zu einem regelmäßigen Fünfeck zusammenlegen, indem man ihn entlang von (1) faltet und dann entlang von (2) nach vorne klappt, ebenso mit (3) und (4), usw.



Aufgabe 1

a) Begründe, dass sich so tatsächlich ein regelmäßiges Fünfeck ergibt.
Insbesondere: Warum wurde als Startwinkel 72° genommen?

b) Dieselbe Anleitung funktioniert auch, um ein regelmäßiges Siebeneck zu falten – dazu muss man allerdings D^2U^1 statt D^2U^2 falten und mit dem Winkel … anfangen (bitte selber nachdenken). Probiere es aus!

Aufgabe 2

Es kommt noch besser: *Für die Praxis* ist es egal, mit welchem Winkel man anfängt! Überzeuge dich davon, indem du weitere Fünf- bzw. Siebenecke faltest, dabei aber Startwinkel nimmst, die sich ruhig deutlich von den richtigen Werten unterscheiden.

a) Beschreibe, was passiert.

b) Begründe dieses Phänomen, indem du zeigst, wie groß z. B. beim Fünfeck der Fehler nach vier Faltungen (also nach D^2U^2) ist, wenn der Startwinkel nicht 72°, sondern $72° + \varepsilon$ beträgt.

In der Praxis kann man also einfach mit irgendeinem Startwinkel anfangen und später die ersten paar Faltungen vom Papierstreifen abschneiden.

Aufgabe 3

Hier ist das allgemeine Faltverfahren für regelmäßige n-Ecke mit ungeradem n: Fange mit dem Winkel $\frac{360°}{n}$ an und falte solange D (bzw. U), bis die dabei neu entstehende Faltkante mit dem oberen (bzw. unteren) Rand des Streifens einen Winkel bildet, der ein ungerades Vielfaches von $\frac{180°}{n}$ ist.

a) Zeige, dass sich so für ein Fünf- bzw. Siebeneck tatsächlich D^2U^2 bzw. D^2U^1 ergibt.

b) Falte auf die beschriebene Weise regelmäßige Dreiecke, Neunecke, … Warum sind auch hier wieder die konkreten Startwinkel *in der Praxis* nicht so wichtig?

Aus den folgenden Überlegungen ergibt sich schließlich (wie?), dass man dieses Faltverfahren auch für regelmäßige n-Ecke mit geradem n nutzen kann.

c) Zeige, dass man einen für ein $\frac{n}{2}$-Eck gefalteten Papierstreifen durch Falten so ergänzen kann, dass man ihn wiederum per „Falten und Klappen" zu einem n-Eck zusammenlegen kann.

d) Falte einen Papierstreifen so, dass man aus ihm per „Falten und Klappen" ein Quadrat erhält.