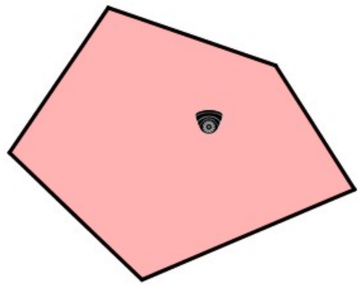
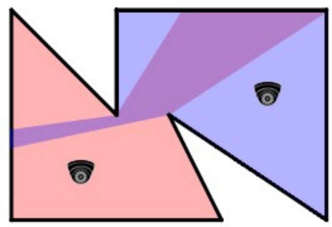
Problem des Monats Juni / Juli 2018

Das Museumswächter-Problem





In einem Museum sollen Kameras an der Decke installiert werden, um die Ausstellungsräume überwachen zu können. Dabei haben die Kameras einen Rundumblick bzw. können um ihre eigene Achse gedreht werden. Das Museumswächter-Problem besteht nun darin, anzugeben, wie viele solcher Kameras mindestens benötigt werden und an welchen Stellen sie installiert werden müssen, um die Räumlichkeiten lückenlos zu überblicken. Dabei soll das Museum nur geradlinige Wände besitzen.

Man betrachte die abgebildeten Beispiele: Im oberen Museum genügt offenbar eine einzige Kamera, und es ist sogar egal, wo sie platziert wird, während im unteren Museum klar ist, dass mindestens zwei benötigt werden, z. B. an den eingezeichneten Stellen.

Aufgabe 1
Tendenziell wird man umso mehr Kameras benötigen, je mehr Wände das Museum besitzt. Untersuche diese Beziehung anhand eigener Beispiele, insbesondere: Stelle eine Vermutung darüber auf, welches jeweils die kleinste Zahl an Kameras ist, die für jedes Museum mit einer vorgegebenen Zahl an Wänden (oder gleichbedeutend: Ecken) ausreicht.

Aufgabe 2
Es soll nun bewiesen werden, welches die kleinste Zahl an Kameras ist, die für jedes Museum mit n Wänden (oder gleichbedeutend: n Ecken) ausreicht. Dazu beachte man, dass wie immer in solchen Situationen zwei Dinge zu zeigen sind:

1. Die behauptete Zahl an Kameras für Museen mit n Wänden soll die *kleinste* solche Zahl sein. Man muss also jeweils ein konkretes Museum mit n Wänden angeben, bei dem man nicht schon mit weniger als dieser Zahl an Kameras auskommt.

2. Man muss für alle Museen mit n Wänden zeigen, dass man mit der behaupteten Zahl an Kameras auskommt.

Im Hinblick auf den zweiten Punkt ist ein genial klarer Beweis bekannt, aus dem auch noch hervorgeht, wo die Kameras zu positionieren sind: im Wesentlichen muss man sich nämlich nur überlegen, dass man jedes Museum in dreieckige Flächen aufteilen kann (wobei die Ecken der Dreiecke mit den ursprünglichen Ecken des Museum übereinstimmen), und dass man in allen „Dreiecksnetzen“ jede Ecke so mit einer von drei Farben versehen kann, dass alle Dreiecke in diesem Netz drei verschieden gefärbte Ecken haben.