

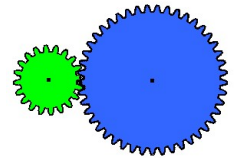
Problem des Monats Dezember 2017 / Januar 2018

Der Uhrmacher des Weihnachtsmanns – Teil 2

Achille, der Uhrmacher des Weihnachtsmanns, erklärt seinem Chef: „Zeigeruhren besitzen typischerweise eine Energiequelle (z. B. eine aufgezogene Feder oder eine Batterie), von der ein Zahnrad angetrieben wird. Das Problem ist, die Zeiger mit geeigneten Zahnradgetrieben jeweils mit der passenden Geschwindigkeit zu drehen.¹

Aufgabe 1

Zum Beispiel treibt rechts das kleine Rad mit 20 Zähnen das große mit 45 Zähnen an. Denke doch als Erstes mal über diese Fragen nach: Wie oft dreht sich das große Zahnrad, wenn das kleine eine, zwei, ... Umdrehungen macht? Um welchen Faktor (den man die Übersetzung des Getriebes nennt) dreht sich das kleine Zahnrad schneller als das große? Welche anderen Anzahlen an Zähnen als 20 und 45 könnte man für dieselbe Übersetzung nehmen?

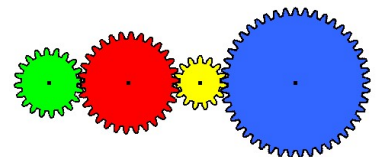


Zweitens kommst du dann sicherlich auch auf eine Lösung für das folgende Problem: Angenommen, das Antriebsrad habe 4 Zähne und drehe sich einmal pro Minute. Wie viele Zähne müsste das große Rad haben, damit ein damit verbundener Stundenzeiger einer Uhr mit der richtigen Geschwindigkeit angetrieben wird?“

Tatsächlich findet der Weihnachtsmann die Antworten auf alle Fragen, aber Achille schränkt ein: „Das Rad, das in der letzten Aufgabe den Stundenzeiger antreiben würde, hätte allerdings für die Praxis zu viele Zähne.

Aufgabe 2

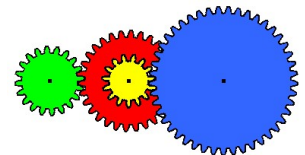
Eine erste Idee wäre deshalb, ein mehrstufiges Getriebe so wie rechts zu verwenden. Untersuche jetzt mal mehrere konkrete Zahnradkombinationen und zeige, wie sie Gesamtübersetzung des Getriebes von den Übersetzungen zwischen benachbarten Zahnradern abhängt!“



Als der Weihnachtsmann schon glaubt, einen Fehler gemacht zu haben, bestätigt Achille: „Deine Überlegungen stimmen! Die erste Idee trägt halt nicht. Trotzdem ist das Stundenzeiger-Problem lösbar.

Aufgabe 3

Betrachte nämlich das Getriebe rechts: dort ist das gelbe Zahnrad fest mit dem roten verbunden, dreht sich also mit derselben Geschwindigkeit. Untersuche auch in diesem Fall mehrere konkrete Zahnradkombinationen und ermittle die Gesamtübersetzung mithilfe der Übersetzungen zwischen benachbarten Zahnradern.



Wenn du das geschafft hast, kannst du sicherlich ein Getriebe für den Antrieb eines Stundenzeigers entwerfen, dessen Antriebsrad 4 Zähne hat und sich einmal pro Minute dreht, wobei kein Rad mit mehr als 40 Zähnen verwendet wird.“

Der Weihnachtsmann ist sichtlich zufrieden, nachdem er auch diese Herausforderung gemeistert hat, und will schon gehen, aber da lächelt Achille: „Warte, der eigentliche Knackpunkt kommt erst jetzt!

Aufgabe 4

Zum Beispiel brauche ich hier ein Getriebe, dessen Antriebsrad sich alle 23 Minuten einmal dreht, und das Rad am Ende alle 191 Minuten. Aus praktischen Gründen will ich aber kein Rad mit mehr als 100 Zähnen verwenden. In diesem Fall kann es keine exakte Lösung geben! Siehst du, woran das liegt?

Immerhin kann man versuchen, das Problem unter den gegebenen Bedingungen bestmöglich zu lösen. Anders gesagt: Ich brauche von allen Brüchen, deren Nenner höchstens 100 ist, den besten Näherungsbruch für $\frac{23}{191}$.² Außerdem möchte ich noch die Zeitspanne wissen, um die das darauf basierende Getriebe pro Stunde im Vergleich zum exakten Wert vor- oder nachgeht.

Aufgabe 5

Und schließlich: Ich würde gerne eine Uhr für das Wohnzimmer bauen, die die Zeit zwischen zwei Weihnachts-terminen anzeigt. Das Antriebsrad des Getriebes soll sich alle 12 Stunden einmal drehen. Am Ende muss ein Zeiger so bewegt werden, dass er sich einmal pro Jahr dreht (das sind 365 Tage, 5 Stunden, 49 Minuten).

Wiederum soll das Getriebe keine Räder mit mehr als 100 Zähnen enthalten und natürlich möglichst genau gehen; außerdem interessiert mich der pro Jahr auflaufende Fehler. Ich glaube, ich sollte wohl meinen Computer nutzen, der schon eine Zerlegung der Zahl 143175 in kleine Primfaktoren ausgespuckt hat ...“

¹Im Internet findet man Simulationsprogramme zum Testen solcher Getriebe, siehe etwa <http://geargenerator.com>.

²Für die benötigten mathematischen Hintergründe siehe das Problem des Monats November 2017.