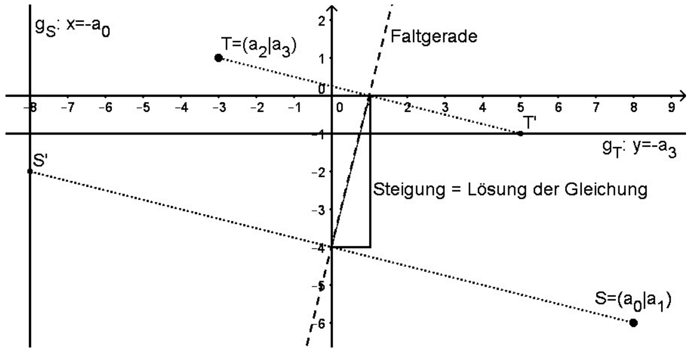
Problem des Monats April / Mai 2017

Gleichungen lösen durch Papierfalten



Die Lösungen der Gleichung

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

kann man folgendermaßen durch Papierfalten ermitteln (s. Abb.): Zunächst zeichne man die Punkte $S = (a_0|a_1)$ und $T = (a_2|a_3)$ auf ein Blatt Papier in ein Koordinatensystem, außerdem noch die achsenparallelen Geraden $g_S\colon x = -a_0$ und $g_T\colon y = -a_3$. Sodann falte man das Papier so, dass gleichzeitig S auf g_S und T auf g_T zu liegen kommen.[1] Die Steigung der Faltgeraden ist dann eine Lösung der obigen Gleichung.

Aufgabe 1
Man ermittle die Lösungen der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ durch Papierfalten und überprüfe sie durch Einsetzen in die Gleichung. Dabei beachte man, dass eine Gleichung dritten Grades bekanntlich bis zu drei verschiedene Lösungen haben kann, was ja drei verschiedenen Möglichkeiten entsprechen würde, die beschriebene Faltung durchzuführen …

Zum Vergleich löse man die Gleichung $x^3 - 8 = 0$, die ja nur eine einzige Lösung besitzt, durch Papierfalten.

Aufgabe 2
Man beweise, dass das angegebene Verfahren tatsächlich funktioniert, d. h. dass die Steigung der Faltgeraden wirklich eine Lösung der Gleichung ist.

[Hinweis: Sei $f(x) = mx + c$ die Gleichung der Faltgeraden, dann sind $C = (0|c)$ und $N = (-\frac{c}{m}|0)$ die Achsendurchschlagspunkte von f. Nun ist es aufgrund der Faltkonstruktion offensichtlich, dass C auf der Strecke SS' und N auf der Strecke TT' liegt, wobei f senkrecht zu beiden dieser Strecken ist. Mithilfe dieser Tatsache lassen sich zwei Gleichungen für m und c aufstellen, aus denen man nur noch c eliminieren muss.]

Aufgabe 3
Das beschriebene Verfahren kann natürlich auch auf quadratische Gleichungen angewendet werden.

a) Man ermittle jeweils die Lösungen der Gleichungen $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x^2 + 6x + 9 = 0$ und $x^2 - 4x + 5 = 0$ durch Papierfalten.

b) Man begründe, dass die Faltgeraden im Fall von quadratischen Gleichungen statt durch Falten auch auf die folgende Weise konstruiert werden können: Sei P ein Schnittpunkt der y-Achse mit demjenigen Kreis, der die Strecke ST als Durchmesser hat. Die Gerade durch P und T ist dann eine Faltgerade.[2]

c) Man begründe nochmals mithilfe des alternativen Verfahrens aus b), warum die drei quadratischen Gleichungen aus a) unterschiedlich viele Lösungen besitzen.

[1] Diese Faltung ist praktisch vielleicht nicht ganz einfach auszuführen, aber zweifellos machbar. In der Tat ist die Existenz so einer Faltung eines der sogenannten Huzita-Hatori-Axiome auf dem Gebiet der Origami-Mathematik.

[2] Dies zeigt also, dass die Lösungen einer quadratischen Gleichung nur mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Es war eine der klassischen Fragen in der Mathematik, ob dies auch für Gleichungen dritten Grades möglich ist. Erst im 19. Jahrhundert konnte diese Frage negativ beantwortet werden.