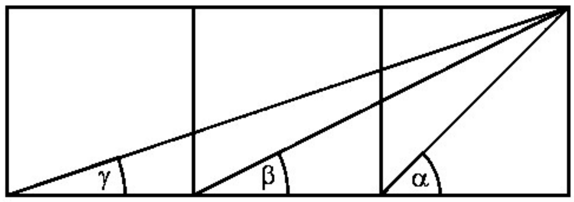
Problem des Monats Februar 2017

Ein geometrisches Problem mit drei Quadraten



Man zeige, dass in der aus drei Quadraten bestehenden Figur für die eingezeichneten Winkel gilt: $\alpha = \beta + \gamma$. (Da übrigens offensichtlich $\alpha = 45°$ ist, folgt hieraus sofort, dass alle drei Winkel zusammen einen rechten Winkel bilden.)

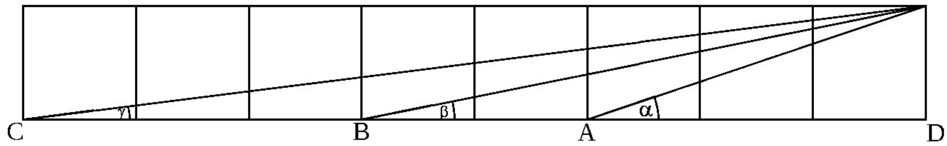
Diese kleine Aufgabe findet man in zahlreichen Sammlungen mathematischer Probleme – wohl auch deshalb, weil mittlerweile Dutzende verschiedene, teils sehr schöne Lösungen bekannt sind. So verwenden manche Lösungen den Satz des Pythagoras und/oder Eigenschaften ähnlicher Dreiecke, bei anderen ist der Clou, die Figur geeignet zu erweitern. Auch eine analytische Lösung ist möglich, etwa mittels trigonometrischer Additionstheoreme.

Also: Wie viele Lösungen findest du, und welche davon findest du am schönsten?

Verallgemeinerung

Es stellt sich heraus, dass die „richtige“ Verallgemeinerung des obigen Problems folgendermaßen lautet: Der Einfachheit halber nehme man Quadrate der Seitenlänge 1, und zwar so viele, dass die Figur (s. u.) von D bis A genau F_{2k} Quadrate, von D bis B genau F_{2k+1} Quadrate und von D bis C genau F_{2k+2} Quadrate enthält, wobei F_n die n-te Fibonaccizahl bezeichnet.

[Bemerkung: Die Fibonaccizahlen sind $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$; $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ usw., wobei sich jede folgende Zahl als Summe der beiden vorhergehenden ergibt. Die abgebildete Figur besteht aus $F_4/F_5/F_6$ Quadraten, das ursprüngliche Problem ergibt sich für $F_2/F_3/F_4$.]



Man zeige auch hier, dass $\alpha = \beta + \gamma$.