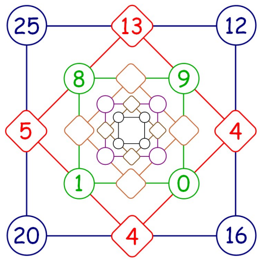
Problem des Monats Dezember 2016 / Januar 2017

Das Differenzen-Spiel



Mathewichtel Enrico erklärt seinem Chef, dem Weihnachtsmann, ein interessantes Spiel: Zuerst schreibt man irgendwelche vier natürlichen Zahlen an die Ecken eines Quadrats – im rechts abgebildeten Beispiel sind es (25; 12; 16; 20).

Als nächstes bildet man die Differenzen benachbarter Zahlen und schreibt diese (bzw. genauer: ihre Beträge) an die Seiten des Quadrats. Die vier neuen Zahlen – hier ergibt sich (13; 4; 4; 5) – bilden nun wiederum ein Quadrat, mit dem man genauso verfährt wie im ersten Schritt. Im Beispiel erhält man (9; 0; 1; 8) im zweiten Schritt. Diesen Prozess führt man nun immer weiter fort.

Aufgaben

a) Der Weihnachtsmann macht sich sogleich daran, das Spiel mehrmals mit verschiedenen Startzahlen auszuprobieren. Dabei macht er eine interessante Entdeckung. Du auch?

[Hinweis: Dass sich die im Spiel auftretenden Quadrupel $(a; b; c; d)$ irgendwann periodisch wiederholen, ist ziemlich klar (Warum?). Dass diese Periodenlänge aber sogar gleich 1 ist, man also schließlich immer (0; 0; 0; 0) erhält, ist nicht offensichtlich. Wer eine Begründung dafür suchen möchte: eine solche zu finden ist nicht ganz leicht, aber machbar . . .]

b) Nach kurzem Nachdenken stellt der Weihnachtsmann fest: „Addiere oder multipliziere ich alle vier Startzahlen mit derselben Zahl, so dauert es jeweils gleich lang bis (0; 0; 0; 0). So dauert es z. B. für die Startzahlen (3; 7; 0; 5) und (5; 9; 2; 7) und (6; 14; 0; 10) gleich lang.“ Begründe dies.

c) Dem Weihnachtsmann ist beim Spielen Folgendes aufgefallen: Beginnt man mit vier Zahlen, die konstant zunehmen, z. B. (3; 7; 11; 15), so scheint man immer nach genau fünf Schritten bei (0; 0; 0; 0) angelangt zu sein. Überprüfe und begründe, ob das wirklich immer so ist.

Eine naheliegende Frage ist nun, ob eine ähnliche Eigenschaft auch für Startzahlen gilt, die mit einem konstanten Faktor größer werden, z. B. (2; 6; 18; 54). Untersuche dies und begründe ggf. deine Vermutung.

Man kann noch weitere besondere Startzahlen daraufhin untersuchen, wie lang es jeweils bis (0; 0; 0; 0) dauert: etwa Startzahlen mit linearer Bildungsregel, z. B. „$\cdot 2 - 1$“ bei (4; 7; 13; 25), oder aufeinanderfolgende Quadratzahlen als Startzahlen, oder aufeinanderfolgende Dreieckszahlen als Startzahlen, oder aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen als Startzahlen, . . .

d) Der Weihnachstmann hat in allen seinen bisherigen Beispielen gesehen, dass es maximal sieben Schritte bis (0; 0; 0; 0) dauert. Findest du vier Startzahlen, bei denen es noch länger dauert?

Enrico bemerkt dazu: „Chef, was auch immer du für eine Länge haben willst: Ich kann auf jeden Fall vier Startzahlen nennen, bei denen es bis (0; 0; 0; 0) so lang dauert wie gewünscht. Ich nehme dazu einfach vier geeignete aufeinanderfolgende Tribonaccizahlen.“ (Bemerkung: Die Tribonaccizahlen lauten 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, . . . , wobei sich jede folgende Zahl als Summe der drei vorhergehenden ergibt.)

Probiere es aus und gib jeweils vier Startzahlen an, bei denen es 9 bzw. 15 Schritte bis (0; 0; 0; 0) dauert. Wie kann man vier Startzahlen erhalten, bei denen dies 99 bzw. 1000 Schritte dauert?

e) Nachdem er das Differenzen-Spiel ausgiebig gespielt hat, nimmt der Weihnachstmann nun statt Quadraten Dreiecke, Fünfecke, . . . Spiele und untersuche auch diese Varianten.