Problem des Monats November 2016

Intransitives Münzenwerfen

Es ist ein regnerischer Nachmittag im November, die Schule ist gerade aus. Du sitzt gelangweilt im Zug nach Hause, als an der Haltestelle Lutum eine etwas zwielichtig anmutende junge Frau einsteigt und sich neben dich setzt.

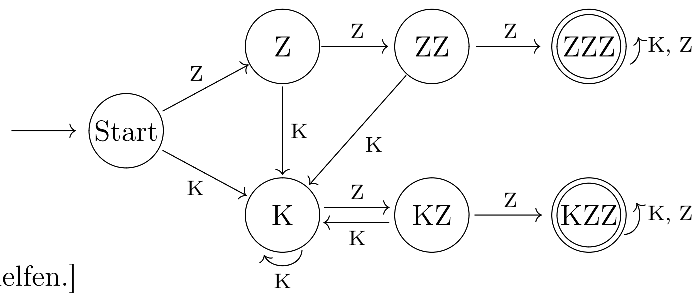
Zum Zeitvertreib schlägt sie dir ein Spiel vor: „Wir brauchen dazu lediglich eine Münze. Jeder von uns bestimmt eine konkrete Kombination von drei Münzwürfen, also z. B. Zahl-Kopf-Zahl (ZKZ), dann werfen wir die Münze so lange, bis entweder deine Kombination oder meine das erste Mal auftritt. Wenn deine Kombination als erstes geworfen wird, gewinnst du den Einsatz, trifft jedoch meine zuerst ein, gewinne ich. Dabei gewähre ich dir zwei Vorteile: Wenn du gewinnst, bekommst du 3 € von mir, wenn ich gewinne, gibst du mir nur 2 €! Darüber hinaus darfst du immer als Erster deine Kombination wählen, ich muss dann zwingend eine andere aussuchen. Nun, was sagst du?“

Bevor du antwortest, denkst du kurz nach: Bei drei Münzwürfen sind acht verschiedene Kombinationen von Kopf und Zahl möglich, die natürlich alle gleichwahrscheinlich sind. Die Chance zu gewinnen ist damit ebenso hoch wie die Chance zu verlieren. Da mein Einsatz aber um 1 € geringer ist, werde ich im Schnitt 50 Cent pro Spiel gewinnen. „Lass und anfangen“, eröffnest du also die erste Runde siegesgewiss.

Etwa eine halbe Stunde später, nachdem etliche Spiele gespielt wurden, verlässt die Frau in Münster den Zug. Du stehst buchstäblich mit leeren Händen da – fast all dein Geld ist verloren. Was ist passiert?

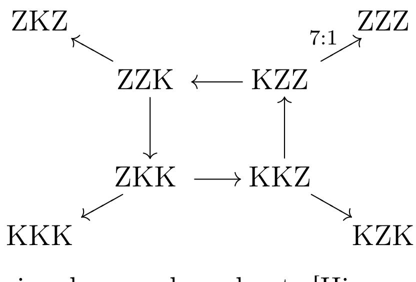
Aufgaben

a) Als konkretes Beispiel für die Fehlerhaftigkeit der obigen Überlegung begründe man zunächst intuitiv, dass bei dem beschriebenen Spiel die Kombination ZZZ mit hoher Wahrscheinlichkeit gegen die Kombination KZZ verlieren würde. [Hinweis: Hat man keine Idee, kann das abgebildete Diagramm helfen.]



Man zeige dann: Die Wahrscheinlichkeit, dass ZZZ gegen KZZ gewinnt, beträgt nur $\frac{1}{8}$.

b) Überraschenderweise kann bei diesem Spiel der zweite Spieler zu jeder (!) vom ersten Spieler gewählten Dreierkombination aus K und Z eine andere Dreierkombination angeben, die mit recht großer Wahrscheinlichkeit gewinnt. Dies ist im abgebildeten Diagramm dargestellt: $\text{KZZ} \xrightarrow{7:1} \text{ZZZ}$ bedeutet dort etwa, dass die Chancen von KZZ gegen ZZZ, wie in a) gezeigt wurde, 7 zu 1 stehen.



Man überprüfe dies, indem man die im Diagramm fehlenden Gewinnchancen berechnet. [Hinweis: Das ist meist nicht so elementar wie im Beispiel aus a). Falls dies aus dem Matheunterricht bekannt ist, kann man allerdings jeweils ein Übergangsdiagramm wie in a) betrachten, die zugehörige Übergangsmatrix aufstellen und mit dem Taschenrechner oder Computer die Entwicklung des Startzustands für lange Zeiten verfolgen.]

c) Man setze die Informationen aus dem Diagramm, welche Kombination aus K und Z jeweils zu wählen ist, um gegen eine bestimmte andere zu gewinnen, in eine leicht zu merkende Regel um.

d) Man untersuche, ob das hier geschilderte Phänomen auch dann auftritt, wenn man statt Dreierkombinationen aus K und Z solche aus zwei, vier, fünf, . . . Münzwürfen tippt. Falls ja, untersuche man, ob eine Regel analog zu c) existiert.