Problem des Monats April / Mai 2016

Küssende Kreise

Das Problem

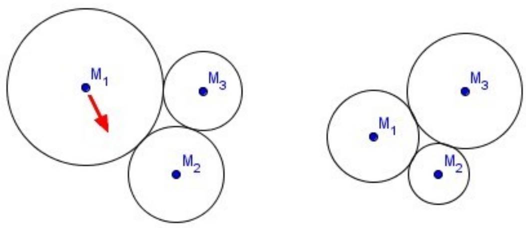
In seinem nicht erhaltenen Buch *Über Berührungen* widmete sich Apollonius von Perge (ca. 262-190 v. Chr.) dem folgenden geometrischen Problem:

> Gegeben seien drei Kreise. Man konstruiere einen Kreis, der alle diese Kreise berührt.[1]

Wir beschränken uns auf einen Spezialfall: die drei gegebenen Kreise sollen sich paarweise berühren. Für diesen Fall fand Descartes 1643 eine analytische Lösung des Apollonischen Problems. Diese wurde später mehrfach unabhängig voneinander wiederentdeckt, wobei vielleicht Soddys Version von 1936 am bekanntesten ist, weil er sie in Form eines Gedichts (*The Kiss Precise*) veröffentlichte.

Hier soll nun allerdings eine geometrische Lösung skizziert werden, die direkt zwei ganz und gar nicht offensichtliche Dinge erhellt:

1. Es gibt tatsächlich immer einen Kreis, der die drei gegebenen Kreise berührt.
2. Es gibt sogar immer zwei verschiedene solcher Kreise.



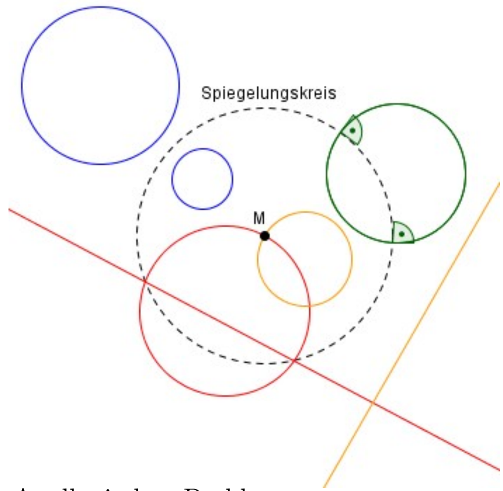
Um konkret mit dieser Situation experimentieren zu können, ist die erste Aufgabe an den Leser nun: Man implementiere in einem Dynamische-Geometrie-Programm ein Verfahren, so dass man die Mittelpunkte der drei gegebenen sich berührenden Kreise beliebig verschieben kann, wobei die Radien automatisch angepasst werden.

Bereitstellung von geeignetem Werkzeug

Für die Lösung des Apollonischen Problems benötigen wir die Spiegelung an einem Kreis: Der Bildpunkt P' eines Punktes P bei Spiegelung an einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r ist derjenige Punkt auf dem Strahl von M durch P, so dass $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$.

Man führe selbst einige Kreisspiegelungen durch und überzeuge sich davon bzw. begründe, dass

- Punkte auf dem Spiegelungskreis Fixpunkte sind,
- zweimaliges Spiegeln am selben Spiegelungskreis die Ausgangssituation wiederherstellt,
- das Bild eines Kreises oder einer Geraden ein Kreis ist, wobei dieser Bild„kreis“ allerdings eine Gerade ist, wenn das ursprüngliche Objekt durch den Mittelpunkt des Spiegelungskreises geht,
- Kreise, die den Spiegelungskreis rechtwinklig schneiden, auf sich selbst abgebildet werden.

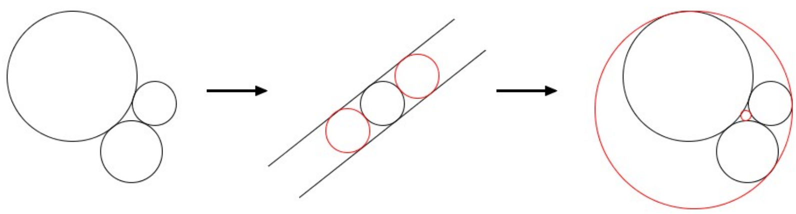


Lösung des Problems

Mithilfe einer geeigneten Kreisspiegelung erhält man eine geniale Lösung des Apollonischen Problems:

Als Mittelpunkt des Spiegelungskreises werde ein Berührpunkt von zwei der der drei gegebenen Kreise gewählt. Ansonsten ist der Spiegelungskreis beliebig (besonders einfach wird es allerdings, wenn er so gewählt wird, dass er den dritten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet).

Nachdem die drei gegebenen Kreise gespiegelt sind, ist es auf einmal völlig klar, dass es zwei Kreise gibt, die alle diese Kreise berühren! Spiegelt man diese beiden schließlich zurück, hat man das Apollonische Problem gelöst.



[1]„Kreis“ kann dabei manchmal auch „Gerade“ oder „Punkt“ bedeuten – beim Studium des vorliegenden Problems des Monats sollte man eine Ahnung davon bekommen, inwiefern das sinnvoll ist.