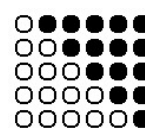


Problem des Monats März / April 2015

Begründungen mit Bildern

Der Legende nach wurde dem neunjährigen Carl Friedrich Gauß in der Schule aufgetragen, als Rechenübung die Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren. Der kleine Carl sah das Ergebnis jedoch unmittelbar, indem er ein Argument verwendete, wie es rechts dargestellt ist: Anhand des Bildes kann man sehen (wie?), dass $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \cdot 6 : 2 = 15$ ist.



Ebenso rechnete Gauss einfach

$$1 + 2 + \dots + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 5050.$$

Aufgabe

Betrachte jeweils die Gleichungen und ergänze einige weitere nach demselben Muster. Stimmen diese Gleichungen dann auch? Falls ja: Begründe die Gesetzmäßigkeit mithilfe eines Bildes.

| | |
|---------------------------|-------------------|
| $1 = 1^2$ | $1 = 1^2$ |
| $1 + 2 + 1 = 2^2$ | $1 + 3 = 2^2$ |
| $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$ | $1 + 3 + 5 = 3^2$ |
| ... | ... |

| | |
|-----------------------|---------------------|
| $1^2 - 1 = 2 \cdot 0$ | $3^2 - 2^2 = 3 + 2$ |
| $2^2 - 1 = 3 \cdot 1$ | $4^2 - 3^2 = 4 + 3$ |
| $3^2 - 1 = 4 \cdot 2$ | $5^2 - 4^2 = 5 + 4$ |
| ... | ... |

$$\begin{aligned}
 1^2 &= 1 \cdot 2 : 2 \\
 2^2 - 1^2 &= 2 \cdot 3 : 2 \\
 3^2 - 2^2 + 1^2 &= 3 \cdot 4 : 2 \\
 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 &= 4 \cdot 5 : 2 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$