Problem des Monats Februar 2015

Simpel, aber doch mächtig

Das sogenannte *Schubfachprinzip* besagt:

> Verteilt man $n + 1$ Objekte auf n Schubfächer, so gibt es am Ende mindestens ein Fach, das mehr als ein Objekt enthält.

Das ist nun wirklich keine sensationelle Erkenntnis! Stehen z. B. im Lehrerzimmer 9 Stühle für 10 Lehrkräfte zur Verfügung und alle setzen sich, so sitzt schließlich auf mindestens einem der Stühle mehr als eine Person (was durchaus schon vorgekommen sein soll . . .).

Die Verallgemeinerung des Prinzips ist ebenso offensichtlich, daher nur anhand eines weiteren Beispiels: Kehren 16 Tauben in ihrem heimischen Schlag zurück, in dem es 5 Nester gibt, dann muss es mindestens ein Nest geben, das von mindestens 4 Tauben besetzt wird.

Obwohl das Schubfachprinzip so einfach ist, findet es in allen möglichen Situationen in der Mathematik seine Anwendung, und so manche tiefliegende Erkenntnis (das Problem dieses Monats geht in so eine Richtung) kann mit seiner Hilfe bewiesen werden.

Beweise zum Aufwärmen (grob geordnet nach Schwierigkeitsgrad)

- In Münster (ca. 300 000 Einwohner) leben zwei Personen, die exakt gleich viele Haare auf dem Kopf haben (laut Wikipedia haben Menschen höchstens etwa 200 000 Haare auf dem Kopf).
- Wie viele Schüler müssten an einer Schule sein, damit man sicher sein könnte, dass 2 (3, . . .) von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Unter 12 voneinander verschiedenen zweistelligen Zahlen gibt es immer 2, deren Differenz eine zweistellige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist.
- Eine Zielscheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2 m wird 5-mal getroffen. Warum gibt es dann mit Sicherheit zwei Löcher, die höchstens 1 m voneinander entfernt sind? Wie oft muss man treffen, damit es mit Sicherheit zwei Löcher gibt, sie höchstens 50 cm voneinander entfernt sind?
- Gegeben sei der Graph mit 6 Ecken, in dem jede Ecke mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden ist. Färbt man jede Kante blau oder rot, enthält der Graph auf jeden Fall ein Dreieck mit gleichfarbigen Seiten.

Nun das eigentliche Problem des Monats

a) Unter sechs Personen befinden sich stets drei, die sich entweder alle gegenseitig kennen oder die völlige Fremde sind.

b) In einem Netzwerk von 17 Wissenschaftlerinnen tausche sich jede Wissenschaftlerin regelmäßig mit jeder anderen aus, wobei je zwei Wissenschaftlerinnen über genau ein Thema reden: entweder über „Differentialgeometrie“ oder „Algebraische Topologie“ oder „Gruppentheorie“. Dann gibt es drei Wissenschaftlerinnen, die untereinander alle über dasselbe Thema reden.