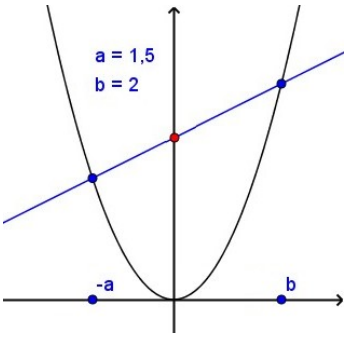
Problem des Monats Februar 2019

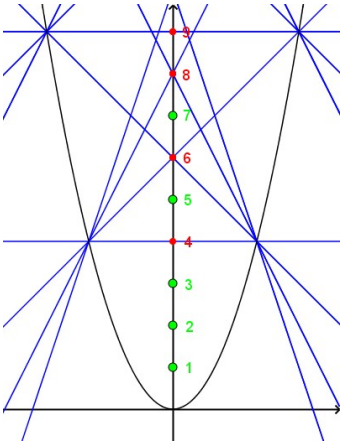
Die Parabel als Multiplikationsmaschine



Eine Normalparabel wird in ein Koordinatensystem gezeichnet. Für beliebige Zahlen a und b (es dürfen auch negative oder nicht-ganze Zahlen sein) werden sodann die beiden Punkte auf dem Graphen der Parabel verbunden, die die x-Koordinaten $-a$ und b haben (vgl. Abb.).

Man untersuche für mehrere Beispiele jeweils den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit der y-Achse und erkläre die Überschrift!

Zur Begründung der Beobachtung kann dieser Schnittpunkt entweder mit konkreten Werten für a und b oder auch gleich allgemein berechnet werden.



Ein Primzahlsieb

Wenn man die oben beschriebene Konstruktion nacheinander für alle Paare natürlicher Zahlen $a, b \geq 2$ durchführt, dann verlaufen schließlich genau durch 1 und die Primzahlen auf der y-Achse keine Geraden. Man begründe dies.

Allgemeiner begründe man, dass durch einen Punkt $(0, n)$ auf der y-Achse genauso viele Geraden verlaufen, wie n echte Teiler hat.

Tangenten an die Parabel (Fragen für Oberstufen-SuS)

Wenn in der oben beschriebenen Konstruktion $-a$ immer näher an b liegt, wird aus der Verbindungsgeraden offenbar die Tangente an die Parabel an der Stelle b. „Funktioniert“ die geometrische Multiplikation von a und b im Grenzfall $-a = b$ immer noch? Erläutere dazu, wie die oben bereits hergeleitete Gleichung der Verbindungsgeraden in diesem Fall lautet.

„Passt“ übrigens deren Steigung auch zu den Ergebnissen aus dem Unterricht?