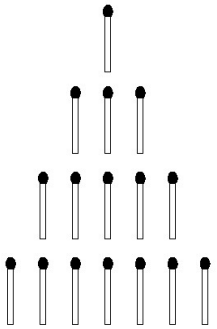
# Problem des Monats März 2017

## Nim



Das Nim-Spiel funktioniert so: Gegeben sind Haufen mit Spielsteinen (z.B. 4 Haufen mit 1, 3, 5 und 7 Spielsteinen, s. Abb.). Die Spieler A und B entfernen abwechselnd von genau einem der Haufen eine beliebige positive Anzahl von Steinen, wobei A beginnt. Gewinner ist, wer den letzten Stein nimmt.

### Aufgabe 1

Spiele Nim mehrmals, wobei du auch die Anzahl der Haufen sowie die anfängliche Verteilung der Spielsteine auf die Haufen variierst (verwende zunächst nicht zu viele Haufen und Spielsteine; nimm zuerst z. B. nur 2 Haufen). Untersuche anhand dieser Beispiele,

- welcher Spieler jeweils das Spiel gewinnen kann und
- wie dieser Spieler spielen muss, um auf jeden Fall zu gewinnen.

Es stellt sich z. B. heraus, dass im Fall von 4 Haufen mit 1, 3, 5 und 7 Spielsteinen stets Spieler B gewinnen kann. Enthält andererseits der dritte Haufen zu Beginn 6 statt 5 Steine, kann immer Spieler A gewinnen.

Kannst du auch allgemein beschreiben, wann welcher Spieler wie gewinnen kann?

### Beschreibung einer allgemeinen Gewinnstrategie

Es ist die folgende Gewinnstrategie für Nim bekannt: Man stellt die Anzahlen der Steine in den Haufen als Dualzahlen dar und zählt dann für jeden Stellenwert die vorkommenden 1en. Zum Beispiel sind im Fall von 4 Haufen mit 1, 3, 5 und 7 Spielsteinen die Dualzahlen 001, 011, 101 und 111, so dass beim Stellenwert 4 insgesamt 2 1en, beim Stellenwert 2 ebenfalls 2 1en und beim Stellenwert 1 sogar 4 1en vorkommen.

Ist nun die Anzahl der 1en für jeden Stellenwert gerade (wie etwa 2, 2 und 4 in unserem Beispiel), so liegt eine *Verlustst*ellung vor: der am Zug befindliche Spieler verliert mit Sicherheit, wenn der andere richtig weiterspielt. Gibt es jedoch für mindestens einen Stellenwert eine ungerade Anzahl an 1en, so liegt eine *Gewinnstellung* vor: der am Zug befindliche Spieler gewinnt zwangsläufig, wenn er richtig weiterspielt.

### Aufgabe 2

Probiere die beschriebene Strategie anhand mehrerer konkreter Beispiele aus. Damit sie funktionieren kann, muss jeder Zug aus einer Verluststellung eine Gewinnstellung ergeben, und in einer Gewinnstellung muss immer ein Zug existieren, der zu einer Verluststellung führt.

Begründe, dass beides bei dieser Strategie der Fall ist.