Problem des Monats Oktober / November 2022

Wahrscheinlichkeiten und Wartezeiten rekursiv berechnen

Aufgabe 1
In einer Urne befinden sich eine rote und eine blaue Kugel. Die Spieler A und B ziehen abwechselnd eine Kugel und legen sie nach ihrem Zug jeweils wieder zurück. Gewonnen hat derjenige von beiden, der als erster die rote Kugel zieht.

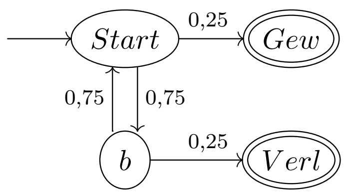
a) Man ermittle die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A.

b) Man bearbeite a), wenn sich weiterhin nur eine rote Kugel, aber 2, 3, … blaue Kugeln in der Urne befinden.

c) Man bearbeite a) allgemein für den Fall, dass die beiden Spieler abwechselnd ein Glücksspiel mit Gewinnwahrscheinlichkeit p spielen.

[Hinweis: Bearbeitet man das ganze mithilfe von Baumdiagrammen, ist die allgemein (aber nicht in der Schule) bekannte Formel für den Wert einer sogenannten „geometrischen Reihe“ hilfreich, die besagt, dass für jede reelle Zahl $0 \leq x < 1$ gilt: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$.]

Aufgabe 2
Wie lang dauert es im Durchschnitt, bis das Spiel aus Aufgabe 1 endet? Anders gesagt: Man ermittle den Erwartungswert der Zufallsgröße, die angibt, in welcher Runde das Spiel endet.



Eine viel einfachere Methode als mit Baumdiagrammen, um die beiden obigen Aufgaben zu lösen, bietet die Darstellung des Spiels als Zustandsgraph. Für den Fall, dass die Urne eine rote und drei blaue Kugeln enthält, soll dies einmal demonstriert werden: Sei p_X die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler gewinnt, wenn er sich aktuell im Zustand X des abgebildeten Graphen befindet. Sei außerdem τ_X die erwartete Anzahl an Runden vom Zustand X bis zum Ende des Spiels. Dann gilt:

$$p_{Start} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot p_b \quad , \quad p_b = \frac{3}{4} \cdot p_{Start} \qquad \text{bzw.} \qquad \tau_{Start} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \tau_b \quad , \quad \tau_b = 1 + \frac{3}{4} \cdot \tau_{Start}.$$

Aufgabe 3
Man überzeuge sich davon, dass die Lösungen der beiden obigen Gleichungssysteme für die Gewinnwahrscheinlichkeiten bzw. die durchschnittlichen Wartezeiten bis zum Spielende auf dieselben Ergebnisse wie in Aufgabe 1 und 2 führen.

Aufgabe 4

a) Es wird gewürfelt, bis die erste 6 kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den Würfen vorher genau eine 4 dabei war?

b) Beim wiederholten Münzwurf wird aufgeschrieben, in welcher Reihenfolge „Kopf“ und „Zahl“ oben liegen.

  i) Wie viele Würfe dauert es durchschnittlich, bis das erste Mal KKZZ kommt?

  ii) A und B spielen gegeneinander. A hat sich die Folge KKZ ausgesucht, B die Folge KZK. Der Spieler, dessen Folge zuerst auftaucht, gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A?[1]

[1] vgl. Problem des Monats November 2016