

Problem des Monats Oktober / November 2023

Münzwurf-Magie

Lieber Leser, hast du ein paar Münzen zur Hand für einen bemerkenswerten Zaubertrick? Drei Münzen genügen, wobei die Münzen auch verschiedene Nennwerte haben dürfen.



Ordne nun diese Münzen in einer Reihe von links nach rechts an, und zwar so, dass nicht alle Kopf oder alle Zahl zeigen. Sehr gut! Beim Schreiben dieser Zeilen habe ich die konkrete Verteilung von Kopf und Zahl bei deinen Münzen bereits vor meinem geistigen Auge vorausgesehen. Wenn du jetzt meine Hand bist, werde ich die Münzen alle auf die gleiche Seite drehen, so dass alle Kopf oder alle Zahl zeigen.

Drehe nun dazu bitte die linke Münze um. Sind die Münzen jetzt alle gleich? Eine große Zahl der Leser wird „Ja!“ rufen und von meiner Allwissenheit überwältigt sein. Für den Rest von euch geht der Trick weiter.

Drehe bitte die mittlere Münze um. Sehr gut! Sind die Münzen nun identisch? Viele weitere Leser werden von meinem schnellen Erfolg überrascht sein. Für den Rest von euch geht der Trick noch einmal weiter ...

Hmm, lass mich nachdenken – ich muss einen Fehler gemacht haben, als ich deine Münzen das erste Mal vor mir sah. Ach ja, ich verstehe! Ich hätte dich am Anfang gar nicht die linke Münze umdrehen lassen sollen. Bitte drehe also die linke Münze noch einmal um. Jetzt sage ich dir, dass auch deine Münzen alle das gleiche zeigen.

Aufgabe 1

Auf den ersten Blick ist es überraschend, dass man bei diesem Trick stets nach höchstens drei Anweisungen des Magiers bei einer der Münzen-Anordnungen KKK oder ZZZ landet, obwohl es acht verschiedene Anordnungen gibt (KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ).

Bei näherer Betrachtung ist es aber nicht allzu schwer, den Trick zu analysieren. Tue das!

Bei wiederholter Durchführung des Tricks sollte der Magier daher unbedingt die drei Anweisungen variieren, die er den Zuschauern gibt:

Aufgabe 2

- Begründe, dass der Magier ebensogut mit den folgenden drei Anweisungen sein Ziel erreicht: „Zuerst die rechte Münze umdrehen, dann die linke, schließlich die rechte.“
- Für den Zuschauer noch undurchsichtiger wird es, wenn der Magier auch Anweisungen gibt, die das gleichzeitige Umdrehen mehrerer Münzen beinhalten. Begründe, dass z. B. auch funktioniert: „Zuerst die mittlere und die rechte Münze umdrehen, dann die mittlere, schließlich die mittlere und die rechte.“
- Finde weitere Folgen von Anweisungen, die zum Ziel führen.

Aufgabe 3

Wenn die Zuschauer vier statt drei Münzen verwenden, kann der Magier stets mit höchstens sieben Anweisungen erreichen, dass die vier Münzen alle das gleiche zeigen. Finde eine bzw. mehrere solcher Möglichkeiten.

Allgemein braucht der Magier bei n Münzen höchstens $2^{n-1} - 1$ Anweisungen (für $n \geq 5$ ist der Trick daher nicht mehr praktikabel). Das folgt z. B. direkt aus der folgenden Überlegung:

Aufgabe 4

Die Folge der Anweisungen bei diesem Trick kann sich der Magier leicht merken, indem er sich jede Anordnung der n Münzen als Ecke eines n -dimensionalen Würfels vorstellt und dann im Geist eine Seite dieses Würfels „abläuft“. Konkret:

- Bei drei Münzen entspricht jede Anordnung einer Ecke eines Würfels, und der Magier läuft im Geist eine quadratische Seitenfläche dieses Würfels ab.
- Bei vier Münzen entspricht jede Anordnung einer Ecke eines Tesseracts (d. h. eines vierdimensionalen Hyperwürfels), und der Magier läuft im Geist eine würfelförmige Seitenfläche dieses Tesseracts ab.

Erläutere dies!